SINCE ET GARRABOS

PROBLÈMES DE SCIENCES PHYSIQUES

AVEC SOLUTIONS

CLASSES DE 2e C T

VUIBERT

A LA MÊME LIBRAIRIE

DES MÊMES AUTEURS

Problèmes de Sciences physiques. — Vol. 14/21 cm.

Classes de Quatrième et Troisième ..... **9,20 F**

Classes de Première A et B..... *Sous presse*

Classes de Première C, D et E ..... **17,05 F**

Classes de Mathématiques, Mathématiques techniques, Sciences expérimentales ..... **15,35 F**

Comment on résout le Problème de Physique. — *Méthode destinée aux candidats aux examens, avec de nombreux exemples*, par FAVRE et GAUTIER. — Vol. 14/21 cm ..... **8,20 F**

On vend aussi séparément :

I. — *Statique, Chaleur* ..... **2,55 F**

II. — *Optique géométrique, Électricité* ..... **2,55 F**

III. — *Dynamique expérimentale, Énergie, Mouvements vibratoires* ..... **4,10 F**

Comment on résout le Problème de Chimie. — *Méthode destinée aux candidats aux examens, avec de nombreux exemples*, par FAVRE et GAUTIER. — Vol. 14/21 cm..... **2,55 F**

Annales de Première. — Vol. 11/18 cm :

Fascicule 2. SCIENCES PHYSIQUES..... **3,10 F**

Annales du Baccalauréat. — Vol. 11/18 cm :

Fascicule 3. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Philosophie* et *Sciences expérimentales*) ..... **3,10 F**

Fascicule 4. SCIENCES PHYSIQUES (séries *Mathématiques élémentaires* et *Mathématiques et Technique*) ..... **3,10 F**

Annales corrigées du Baccalauréat. — Vol. 11/18 cm:

Fascicule 3. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Philosophie* et *Sciences expérimentales*) ..... **4,10 F**

Fascicule 4. SCIENCES PHYSIQUES (séries *Mathématiques élémentaires* et *Mathématiques et Technique*) ..... **4,10 F**

PROBLÈMES

DE

SCIENCES PHYSIQUES

à l'usage des classes

de

Seconde C et T

PAR

L. SINCE & L. GARRABOS

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
PROVISEUR DU LYCÉE BELLEVUE
A TOULOUSE

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
PROFESSEUR AU LYCÉE LAKANAL
A SCEAUX

QUATRIÈME ÉDITION

(revue et augmentée)

conforme à l'arrêté du 13 juin 1966

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1968

© *Librairie Vuibert 1968.*
Tous droits de reproduction, de traduction
et d'adaptation réservés pour tous pays.

AVANT-PROPOS

La classe de Seconde est la classe d'initiation à la méthode des sciences physiques. Les programmes officiels prévoient pour elle des questions relativement simples devant être étudiées moins dans un esprit encyclopédique que dans un esprit de logique et de rigueur scientifique. Il importe donc que, très tôt, l'élève se familiarise avec les procédés de raisonnement qui permettent de faire l'application à des cas concrets et précis des règles et des lois générales étudiées dans le cours. L'outil mathématique dans cette classe devra rester très élémentaire et ne pas dépasser les rudiments de l'algèbre classique.

La difficulté des problèmes proposés, résidera le plus souvent dans le nombre des inconnues, dans le fait qu'une mesure résultera de plusieurs opérations ou dans l'emploi pour une même grandeur de diverses unités.

Sur ce point, le décret du 3 mai 1961 rendant obligatoire et exclusif l'emploi du système international est venu apporter une notable simplification aux calculs numériques.

Ce décret ignore délibérément cette unité de force illogique qu'est le kilogramme-force, ou kilogramme-poids. On ne s'étonnera donc pas qu'il n'en soit pas question dans cet ouvrage.

Les seules unités employées sont, outre les unités du système international, celles qui figurent dans le tableau annexé au décret et dont l'équivalence avec les unités du système international sont données. C'est le cas des unités du système CGS et de la calorie.

A côté de problèmes d'un bon niveau, nous avons mis dans ce recueil des exercices plus simples. Un certain nombre d'entre eux ont été pris dans l'ouvrage de Seconde de M. Dumesnil avec l'autorisation de leur auteur et de l'éditeur, que nous nous plaisons à remercier ici.

Nous souhaitons que cet ouvrage qui sert d'introduction à la série des ouvrages précédemment parus pour les classes de Première et de Mathématiques élémentaires rende le même service aux élèves studieux : qu'il les aide à acquérir les quelques réflexes intellectuels indispensables pour poursuivre des études de physique et pour profiter pleinement de l'enseignement magistral qu'ils reçoivent.

AVANT-PROPOS DE LA 4e ÉDITION

Cette nouvelle édition est conforme à l'arrêté du 13 juin 1966, complété par les instructions du 31 mars 1967.

Conformément à ces dernières, la présentation des exercices de chimie a été profondément modifiée. C'est ainsi que nous avons adopté de préférence l'écriture ionique pour représenter un bilan réactionnel.

Nous avons cru bon, par ailleurs, de grouper dans un chapitre spécial quelques exemples de réactions d'oxydo-réduction en solution aqueuse, en précisant comment s'effectuent les échanges électroniques.

Bien que l'utilisation des nombres d'oxydation soit facultative, il nous a paru utile de les introduire avec précaution, pour préparer l'étude plus complète des réactions de ce type qui fait partie du programme des classes terminales scientifiques.

TABLEAU DES UNITÉS EMPLOYÉES DANS CET OUVRAGE ET DE LEURS ABRÉVIATIONS

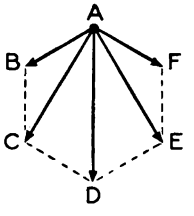
Masse	kilogramme	kg
	gramme	g
	tonne	t
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3
	gramme par centimètre cube	g/cm^3
Force	newton	N
	méganewton	MN
Pression	pascal	Pa
	atmosphère	atm
	centimètre de mercure	cm Hg
	barye	
	millibar	
Travail	joule	J
Puissance	watt	W
Quantité de chaleur	calorie	cal
Chaleur massique	calorie par gramme et par degré Celsius	$cal.\ g^{-1}.{}^{o}C^{-1}$

CHAPITRE I

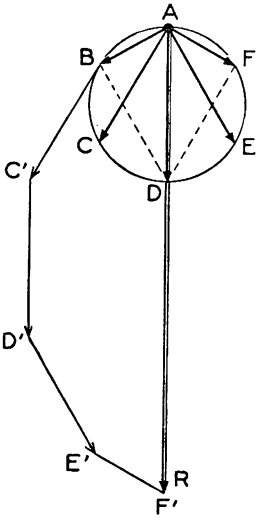
Composition des forces concourantes.

I. — Détermination de la résultante de cinq forces concourantes.

Cinq forces agissent sur le même point, A. Les vecteurs représentatifs de ces forces, issus de A, sont tels que leurs extrémités forment avec A les sommets d'un hexagone régulier. Trouver leur résultante en prenant la plus grande d'entre elles pour unité.



Construction géométrique de la résultante. — A partir du point A, nous portons à la suite les uns des autres des vecteurs équipollents aux vecteurs représentatifs des cinq forces données. Nous obtenons une ligne polygonale ABC′D′E′F′. Le vecteur $\overrightarrow{AF'}$ représente la résultante R cherchée. Par raison de symétrie, le point F′ se trouve sur la ligne d'action du vecteur $\overrightarrow{AD}$.



Calcul de la résultante. — La résultante est représentée par le vecteur $\overrightarrow{AF'}$, tel que

$$\overrightarrow{AF'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}.$$

Mais les points B et E sont diamétralement opposés, ainsi que les points F et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD},$$

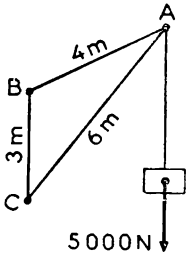
d'où

$$\overrightarrow{AF'} = 3\,\overrightarrow{AD}.$$

Si nous prenons la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$ pour unité, la résultante est numériquement égale à 3 :

$$\mathbf{R = 3.}$$

2. — Calcul des forces exercées par une charge sur les poutres d'une grue.



Une grue est représentée schématiquement sur la figure ci-contre. La charge étant 5 000 N, quel est le sens et la valeur des forces exercées par la charge sur les poutres AB et AC? Résolution par le calcul et par voie graphique.

Le poids $\vec{P}$ de la charge est une force verticale appliquée en son centre de gravité, G. On peut faire glisser cette force sur sa ligne d'action de façon que son point d'application soit en A (*fig.* 1).

Décomposons $\vec{P}$ en deux forces, $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, suivant les directions des deux poutres AB et AC. Les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ agissant ensemble ont le même effet que le poids $\vec{P}$.

La force $\vec{F_1}$ s'exerce sur la poutre AB et tend à l'allonger. La force $\vec{F_2}$ s'exerce sur la poutre AC et tend à la raccourcir.

$\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont les deux forces cherchées.

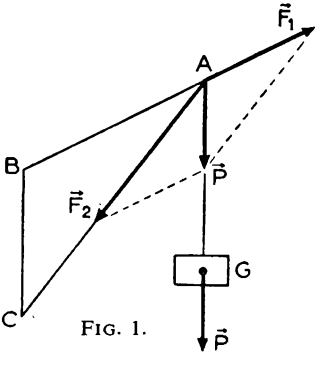


FIG. 1.

Détermination par le calcul des modules des deux forces. — Les triangles ABC et F_1AP sont semblables. Leurs côtés homologues sont proportionnels :

$$\frac{AF_1}{AB} = \frac{PF_1}{AC} = \frac{AP}{BC},$$

ou

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{P}{BC}.$$

Nous tirons de ces relations

$$F_1 = P \times \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad F_2 = P \times \frac{AC}{BC}.$$

Application numérique :

$AB = 4$ m, $AC = 6$ m, $BC = 3$ m, $P = 5\,000$ N.

$$F_1 = 5\,000 \times \frac{4}{3}, \qquad \mathbf{F_1 = 6\,667\ N.}$$

$$F_2 = 5\,000 \times \frac{6}{3}, \qquad \mathbf{F_2 = 10\,000\ N.}$$

Détermination par voie graphique des modules des deux forces. — Nous commençons par nous donner une échelle pour les longueurs et une échelle pour les forces (*fig.* 2).

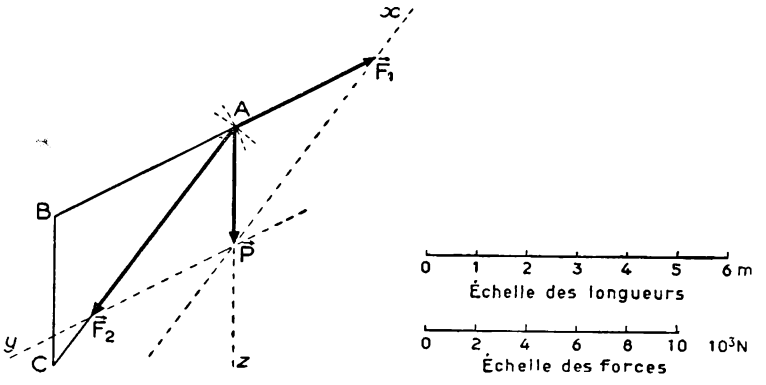


FIG. 2.

Nous construisons géométriquement le triangle ABC, dont nous connaissons les trois côtés.

Avec la règle et l'équerre, nous traçons la parallèle A*z* au côté BC et nous portons sur cette droite le vecteur $\overrightarrow{AP}$ représentant le poids de la charge. A partir de l'extrémité P, nous traçons les parallèles P*x* et P*y* aux côtés AC et AB. P*x* et P*y* coupent ces côtés aux points F_1 et F_2.

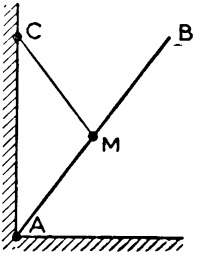
Les vecteurs $\overrightarrow{AF_1}$ et $\overrightarrow{AF_2}$ représentent les deux forces cherchées. Leurs longueurs, d'après l'échelle des forces, donnent leurs modules.

3. — Calcul des forces exercées par une glace sur ses appuis.

Une glace pesant 300 N est maintenue inclinée sur une cheminée par un fil fixé d'une part en son milieu, M, et d'autre part à un clou, C. On donne

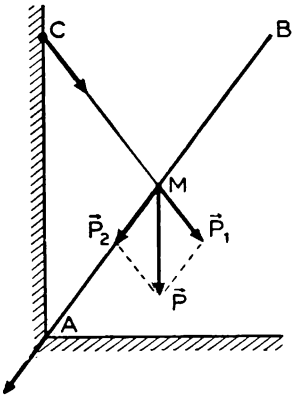
MA = MB = MC = 60 cm, AC = 100 cm.

Calculer la force qui agit sur le clou et celle qui agit sur la cheminée.



Décomposons le poids $\vec{P}$ de la glace, appliqué en son milieu M (centre de gravité) en deux forces $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ suivant les directions CM et MA.

Les deux forces $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ agissant ensemble sur la glace ont le même effet que le poids $\vec{P}$. On peut faire glisser la force $\vec{P_1}$ sur sa droite d'action de façon que son point d'application soit en C : $\vec{P_1}$ représente la force exercée par la glace sur le clou.



On peut de même faire glisser la force $\vec{P_2}$ sur sa droite d'action de façon que son point d'application soit le point d'appui A de la glace : $\vec{P_2}$ représente la force exercée par la glace sur la cheminée.

Le triangle MAC est isocèle : le parallélogramme MP_1PP_2 est donc un losange et $P_1 = P_2$.

La similitude des triangles MP_1P et CMA permet d'écrire les relations

$$\frac{MP_1}{MC} = \frac{MP}{AC}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{P_1}{MC} = \frac{P}{AC},$$

d'où nous tirons

$$P_1 = P \times \frac{MC}{AC} = P_2.$$

Application numérique :

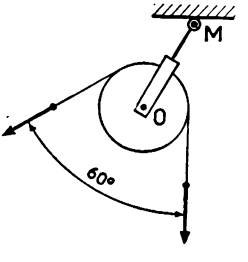
$P = 300$ N, $\quad MC = 60$ cm, $\quad AC = 100$ cm,

$$P_1 = 300 \times \frac{60}{100},$$

$$\mathbf{P_1 = P_2 = 180\ N.}$$

4. — Action de deux forces concourantes sur une poulie fixe.

1° La chape d'une poulie est suspendue au plafond par une tige mobile autour du point M. Les deux brins de la corde passant dans la gorge de la poulie font entre eux un angle de 60°; l'un des brins est vertical. La force agissant sur chaque brin est 200 N.



Trouver la direction de la tige OM et la réaction du plafond. (On suppose négligeable le poids de la poulie et de la tige.)

2° Même question si les deux brins font un angle de 120°, l'un des brins étant horizontal.

1° Soient $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ les deux forces égales appliquées aux deux brins du fil. Si le fil ne glisse pas sur la gorge de la poulie, $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ peuvent être considérées comme appliquées aux points A et B de cette dernière (*fig.* 1).

Les forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ ont une résultante $\vec{R}$ que l'on obtient en les composant après les avoir fait glisser sur leurs lignes d'action jusqu'à leur point d'intersection, C.

Le parallélogramme des forces est un losange de centre I : la résultante $\vec{R}$ passe par l'axe O.

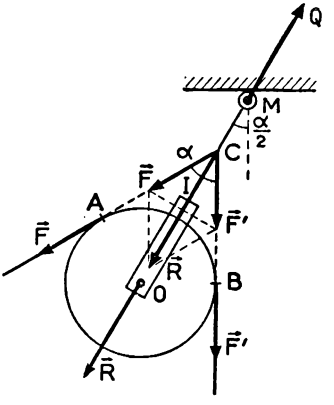


FIG. 1.

Faisons glisser $\vec{R}$ sur sa ligne d'action de façon que son point d'application soit situé sur l'axe O. Le système rigide chape-tige peut être considéré comme soumis à deux forces :

— la force $\vec{R}$ exercée par la poulie sur l'axe O;

— la réaction $\vec{Q}$ du plafond (force de liaison), appliquée au point M.

Le système est en équilibre : $\vec{R}$ et $\vec{Q}$ sont des forces égales et opposées; la tige prend donc leur direction commune faisant l'angle $\frac{\alpha}{2}$ avec la verticale.

Dans le triangle CFF' nous avons

$$CI = CF\cos\frac{\alpha}{2} = F\cos\frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$Q = R = 2\,CI = 2\,F\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Application numérique :

$$F = 200\text{ N}, \qquad \alpha = 60^\circ, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tige forme un angle $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ avec la verticale.

$$Q = 2 \times 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3} = 346{,}4\text{ N},$$

$$\mathbf{Q = 346\text{ N}.}$$

2° Un raisonnement identique au précédent montre que le système chape-tige est soumis à deux forces (*fig.* 2) :

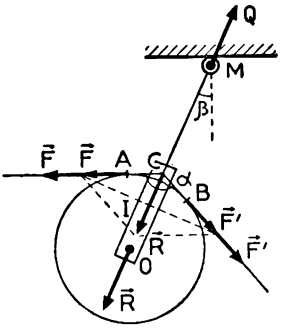


FIG. 2.

— la résultante $\vec{R}$ des deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$, exercée par la poulie sur l'axe O;

— la réaction $\vec{Q}$ du plafond (force de liaison), appliquée au point M.

Le système est en équilibre : $\vec{R}$ et $\vec{Q}$ sont des forces égales et opposées et la tige prend leur direction commune faisant l'angle $\beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$ avec la verticale.

Dans le triangle CFF′ nous avons

$$CI = CF \times \cos\frac{\alpha}{2} = F\cos\frac{\alpha}{2},$$

d'où $$Q = R = 2\,CI = 2\,F\cos\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Application numérique :

$$F = 200\ N, \qquad \alpha = 120^\circ, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot$$

La tige forme un angle $\beta = 90^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 30^\circ$ avec la verticale.

$$Q = 2 \times 200 \times \frac{1}{2},$$

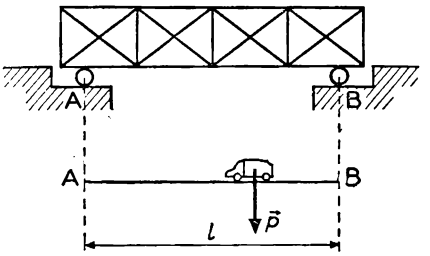
$$\mathbf{Q = F = 200\ N.}$$

CHAPITRE II

Composition des forces parallèles.

5. — Calcul des forces exercées sur ses appuis par un pont métallique.

1° Un pont métallique pesant 2 MN repose par ses extrémités A et B sur deux culées. Quelles sont les forces exercées par le pont sur ses appuis?



2° Un véhicule pesant 0,2 MN s'engage sur le pont. Que deviennent les forces exercées par le pont sur ses appuis lorsque le véhicule est arrivé au tiers de la longueur du pont?

3° De façon générale, trouver l'expression algébrique de ces forces quand le véhicule est à une distance x d'une extrémité du pont dont la longueur est 60 m. Représentation graphique.

1° Le pont est soumis à son poids, $\vec{P}$, appliqué en son centre de gravité, G, situé sur son axe de symétrie vertical (*fig.* 1).

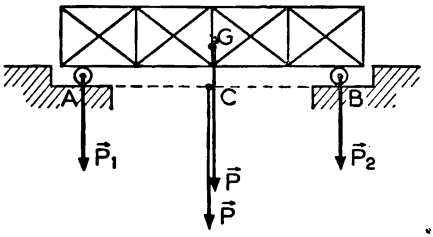


FIG. 1.

On peut faire glisser $\vec{P}$ sur sa ligne d'action de façon que son point d'application, C, soit situé sur la droite horizontale AB joignant les points d'appui. Ce poids peut-être décomposé en deux forces verticales, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, appliquées en A et B.

Les distances GA et GB étant égales, la règle de composition des forces parallèles donne immédiatement

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}.$$

P_1 et P_2 sont les modules des deux forces cherchées.

Numériquement :

$$P = 2 \text{ MN},$$
$$P_1 = P_2 = 1 \text{ MN}.$$

2° Le poids $\vec{p}$ du camion, que l'on peut supposer appliqué au point D situé sur la droite AB, peut être décomposé en deux forces verticales, $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$, appliquées en A et B (*fig.* 2). D'après la règle de composition des forces parallèles, les forces $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ sont telles que

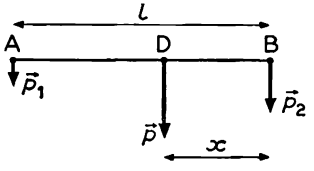


FIG. 2.

$$(1) \qquad p_1 + p_2 = p,$$

et (2) $p_1 \times DA = p_2 \times DB.$

Posons $AB = l$. Cette seconde relation devient

$$p_1 \times \frac{2l}{3} = p_2 \times \frac{l}{3}, \qquad \text{ou} \qquad 2p_1 = p_2.$$

Remplaçons p_2 par sa valeur dans (1) :

$$p_1 + 2p_1 = p,$$

d'où

$$p_1 = \frac{p}{3} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{2p}{3}.$$

Les forces exercées par le pont sur ses points d'appui sont donc

$$\text{sur A :} \qquad Q_1 = P_1 + \frac{p}{3},$$

$$\text{sur B :} \qquad Q_2 = P_2 + \frac{2p}{3}.$$

Numériquement :

$$P_1 = P_2 = 1 \text{ MN}, \qquad p = 0{,}2 \text{ MN},$$

$$Q_1 = 1 + \frac{0{,}2}{3} \text{ MN}, \qquad \mathbf{Q_1 = 1{,}067 \text{ MN}},$$

$$Q_2 = 1 + \frac{2 \times 0{,}2}{3} \text{ MN}, \qquad \mathbf{Q_2 = 1{,}133 \text{ MN}}.$$

3° Si nous désignons par x la distance DB, les relations (1) et (2) deviennent

$$p_1 + p_2 = p$$

et

$$p_1(l - x) = p_2 x.$$

La seconde relation peut s'écrire

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p_2}{l-x} = \frac{p_1 + p_2}{x + l - x} = \frac{p}{l};$$

nous en tirons

$$p_1 = p \times \frac{x}{l} \quad \text{et} \quad p_2 = p \times \frac{l-x}{l}.$$

Les forces exercées par le pont sur ses points d'appui sont donc,

sur A,

$$Q_1 = P_1 + p \times \frac{x}{l},$$

sur B,

$$Q_2 = P_2 + p \times \frac{l-x}{l}.$$

Numériquement :

$$P_1 = P_2 = 1 \text{ MN}, \qquad p = 0{,}2 \text{ MN}, \qquad l = 60 \text{ m}.$$

$$Q_1 = 1 + 0{,}2 \times \frac{x}{60} \text{ MN}, \qquad Q_1 = 1 + \frac{x}{300} \text{ MN},$$

$$Q_2 = 1 + 0{,}2 \times \frac{60-x}{60} \text{ MN}, \qquad Q_2 = 1{,}2 - \frac{x}{300} \text{ MN}.$$

Représentation graphique. — Portons en abscisses les longueurs x (en mètres) et en ordonnées les forces Q_1 et Q_2 (en méganewtons) à partir de 1 MN. Nous obtenons deux droites, OA et BC, qui se coupent en un point M d'abscisse 30 et d'ordonnée 1;10 (*fig.* 3).

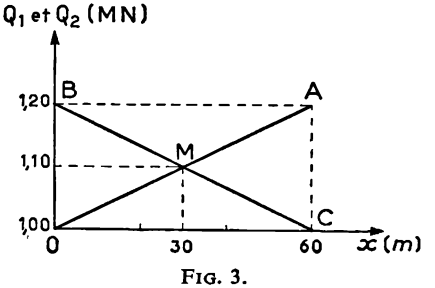


FIG. 3.

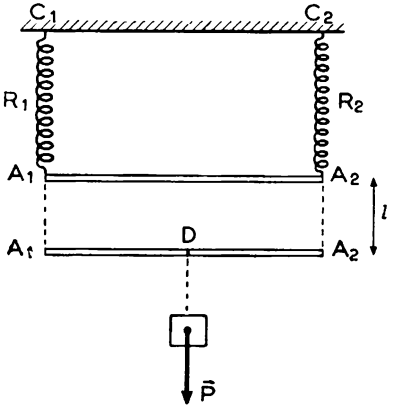
6. — Équilibre d'une tige suspendue à deux ressorts étalonnés parallèles.

On dispose de deux ressorts de poids négligeables et d'égale longueur, R_1 et R_2, qui s'allongent respectivement de 1 cm pour 0,1 N et de 120 mm pour 1 N. On suspend ces ressorts à deux crochets, C_1 et C_2, situés dans un même plan horizontal. On fixe une tige rigide de poids négligeable à leurs extrémités A_1 et A_2 et l'on suspend un poids P en un point D de la tige.

1° Quelle doit être la position du point D (position caractérisée par le rapport $\frac{DA_1}{DA_2}$) pour que, les deux ressorts s'allongeant en même temps, la tige A_1A_2 reste horizontale?

2° De combien s'abaisse la tige lorsque le poids P augmente de 1 N?

1° Décomposons le poids $\vec{P}$ en deux forces verticales, $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$, appliquées respectivement aux extrémités, A_1 et A_2, de la tige. Ces forces sont telles que



$$(1) \quad P = X_1 + X_2,$$

$$(2) \quad X_1 \times DA_1 = X_2 \times DA_2.$$

Nous savons que les deux ressorts s'allongent de la même longueur, l, sous l'action de ces forces.

Si nous supposons les ressorts parfaitement élastiques, les forces X_1 et X_2 sont proportionnelles à l'allongement l :

$$X_1 = k_1 \times l,$$

$$X_2 = k_2 \times l,$$

k_1 et k_2 étant deux constantes.

La relation (2) devient

$$k_1 \times l \times DA_1 = k_2 \times l \times DA_2.$$

Le point D devra satisfaire à la condition suivante :

$$\frac{DA_1}{DA_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ce rapport est indépendant du poids P.

Application numérique :

Le ressort R_1 s'allonge de 1 cm, quand il est soumis à une force de 0,1 N :

$$0{,}1 = k_1 \times 1, \qquad k_1 = 0{,}1 \text{ N/cm}.$$

Le ressort R_2 s'allonge de 120 mm, ou 12 cm, quand il est soumis à une force de 1 N :

$$1 = k_2 \times 12, \qquad k_2 = \frac{1}{12} \text{ N/cm}.$$

$$\frac{DA_1}{DA_2} = \frac{\frac{1}{12}}{0{,}1} = \frac{10}{12},$$

$$\boxed{\frac{DA_1}{DA_2} = \frac{5}{6}}.$$

2° Lorsqu'on suspend au point D de la tige un poids $P' > P$, la condition précédente est encore réalisée. La tige reste horizontale et les deux ressorts prennent le même allongement $l' > l$. Si nous désignons par X_1' et X_2' les deux composantes de P', nous aurons la relation

$$P' = X_1' + X_2' = k_1 \times l' + k_2 \times l' = (k_1 + k_2)\, l';$$

mais

$$P = X_1 + X_2 = k_1 \times l + k_2 \times l = (k_1 + k_2)\, l.$$

Par soustraction nous obtenons

$$P' - P = (k_1 + k_2)\,(l' - l).$$

L'abaissement de la tige est donc

$$l' - l = \frac{P' - P}{k_1 + k_2}.$$

Il est proportionnel à l'augmentation de la charge.

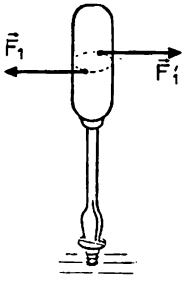
Numériquement :

$$P' - P = 1 \text{ N}, \qquad k_1 + k_2 = 0{,}1 + \frac{1}{12} = \frac{2{,}2}{12} \text{ N/cm},$$

$$l' - l = \frac{1}{\frac{2{,}2}{12}} = \frac{12}{2{,}2},$$

$$\boxed{l' - l = 5{,}45 \text{ cm}}.$$

7. — Étude du couple exercé sur le manche d'un tournevis.



1° Un mécanicien exerce sur le manche d'un tournevis un couple de deux forces tangentielles F_1 et F'_1 de 100 N chacune. Le diamètre du manche est 3 cm. Quel est le moment de ce couple?

2° La largeur du tournevis, au niveau de la vis est de 8 mm. Quelles sont les forces agissant sur la vis?

Que deviendraient ces forces si la largeur du tournevis n'était que 2 mm? Pourrait-il en résulter un dommage pour le tournevis?

1° Les deux forces tangentielles $F_1 = F'_1$ exercées par le mécanicien sur le manche du tournevis sont diamétralement opposées (*fig.* 1).

Si nous désignons par d_1 le diamètre du manche, le moment du couple exercé par le mécanicien a pour valeur

(1) $\mathcal{M} = F_1 \times d_1$.

Numériquement :

$F_1 = 100$ N, $d = 3$ cm, ou 0,03 m,

$\mathcal{M} = 100 \times 0{,}03$,

$\mathcal{M} = \mathbf{3\ m.N.}$

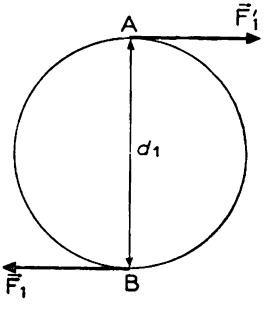


FIG. 1.

2° Le couple de moment $\mathcal{M}$ agit sur la vis par l'intermédiaire de la lame du tournevis (*fig.* 2).

Si nous désignons par d_2 la largeur de cette lame et par F_2 la valeur commune des forces exercées par les extrémités de la lame sur la vis, le moment $\mathcal{M}$ a pour expression

(2) $\mathcal{M} = F_2 \times d_2$.

La comparaison de (1) et (2) donne

$$F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2,$$

d'où $$F_2 = F_1 \times \frac{d_1}{d_2}.$$

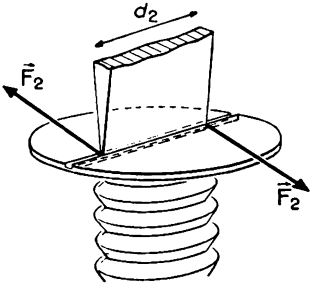


FIG. 2.

Numériquement :

$F = 100$ N, $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 8$ mm, ou 0,8 cm.

$$F_2 = 100 \times \frac{3}{0{,}8}, \qquad \mathbf{F_2 = 375\ N.}$$

Si la largeur du tournevis n'était que 2 mm (c'est-à-dire 4 fois plus petite), chacune des forces s'exerçant sur la vis serait 4 fois plus grande. Leur valeur commune serait

$$F_3 = 375 \times 4,$$

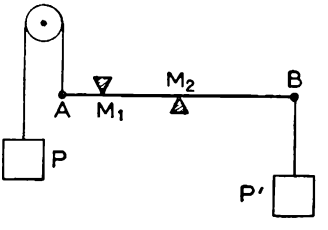
$$F_3 = 1\,500 \text{ N}.$$

Il est probable que, sous l'action de ces forces, le tournevis serait tordu.

8. — Équilibre d'une barre soumise à l'action de deux couples.

Une barre horizontale de poids négligeable est soumise en A et B à l'action d'un couple produit, comme l'indique la figure, par deux poids égaux : $P = P' = 2$ N; $AB = 80$ cm. Deux butoirs, M_1 et M_2, l'empêchent de tourner; ils sont distants de 20 cm; quelles sont leurs réactions?

La longueur M_1M_2 étant donnée, est-il nécessaire de préciser leur position? Peut-on les mettre au-delà de A ou de B?



La barre est soumise à l'action du couple formé par les deux forces égales, $\vec{P}$ et $\vec{P'}$, qui tend à lui communiquer un mouvement de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (*fig.* 1).

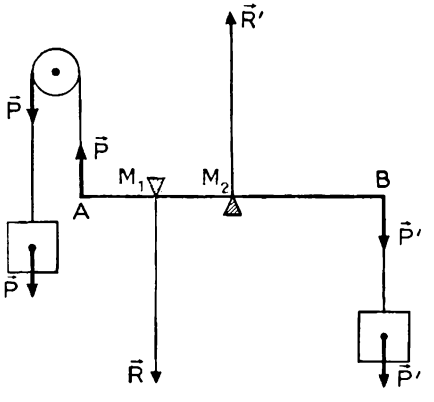


FIG. 1.

Le moment de ce couple a pour valeur

(1) $\mathcal{M}_b = P \times AB.$

Les deux butoirs empêchent la barre de tourner. Puisque la barre est en équilibre, les butoirs exercent sur celle-ci des réactions $\vec{R}$ et $\vec{R'}$, qui constituent un couple de moment $\mathcal{M}_b'$, numériquement égal à $\mathcal{M}_b$.

Les deux réactions ont donc le même module R. Le moment du couple antagoniste qu'elles forment a pour valeur

(2) $$\mathcal{M}_b' = R \times M_1M_2.$$

Les deux moments $\mathcal{M}b'$ et $\mathcal{M}b$ étant égaux,

$$P \times AB = R \times M_1M_2,$$

d'où nous tirons

$$R = P \times \frac{AB}{M_1M_2}.$$

Numériquement :

$P = 2$ N, $AB = 80$ cm, $M_1M_2 = 20$ cm,

$$R = 2 \times \frac{80}{20},$$

$$R = 8 \text{ N}.$$

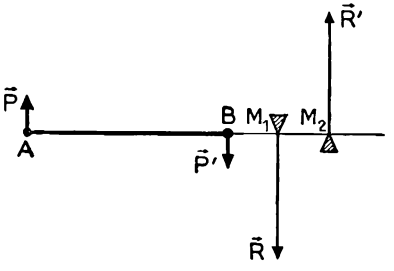


FIG. 2.

Remarquons que, la distance M_1M_2 étant donnée, la valeur numérique de R ne dépend pas de la position des butoirs. On pourrait aussi bien les mettre sur le prolongement de la règle AB, au-delà du point B par exemple (*fig.* 2).

CHAPITRE III

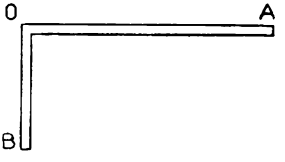
Centre de gravité.

9. — Détermination du centre de gravité d'une équerre.

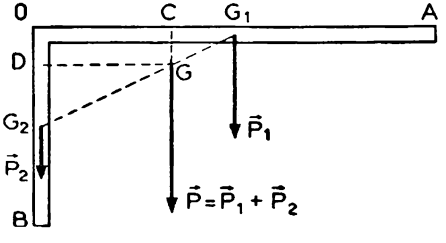
Une équerre est formée de deux barres rectangulaires, OA, OB, de même section, invariablement liées l'une à l'autre

$$(OA = 2\,OB = 2\,a).$$

Déterminer la position de son centre de gravité, G.



Le centre de gravité de l'équerre est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur qui s'exercent sur les deux barres dont elle est formée.



Le poids $\vec{P}_1$ de la barre OA est appliqué en son milieu, G_1.

Le poids $\vec{P}_2$ de la barre OB est appliqué en son milieu, G_2.

La section des barres étant la même et la longueur OA étant égale à deux fois la longueur OB, P_1 est double de P_2.

Le centre de gravité G est donc sur la droite G_1G_2 et partage cet intervalle en parties inversement proportionnelles aux poids

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{GG_1}{GG_1 + GG_2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},$$

$$GG_1 = \frac{G_1G_2}{3}.$$

G étant situé au tiers de l'intervalle G_1G_2 compté à partir de G_1, les projections de G sur OA et OB seront situées aussi au tiers de l'intervalle OG_1 à partir de G_1 et au tiers de OG_2 à partir de O.

$$CG_1 = \frac{OG_1}{3} = \frac{a}{3}, \qquad OC = \frac{2a}{3}.$$

$$OD = \frac{OG_2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{2}, \qquad OD = \frac{a}{6}.$$

10. — Détermination du centre de gravité d'une éprouvette à demi remplie d'eau.

Une éprouvette, en verre d'épaisseur uniforme et égale à 2 mm, a pour hauteur intérieure 20 cm, pour diamètre intérieur 4 cm; la base, de même épaisseur, a 6 cm de diamètre.

1° Où se trouve son centre de gravité?

2° On remplit à moitié d'eau l'éprouvette précédente. Quelle est la position du centre de gravité de l'éprouvette et de son contenu?

Le poids volumique du verre est deux fois et demi celui de l'eau.

1° Position du centre de gravité de l'éprouvette. — Le centre de gravité de l'éprouvette est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur qui s'exercent sur ses différentes parties.

L'éprouvette peut être considérée comme formée :

— d'un manchon cylindrique de diamètre intérieur d, de diamètre extérieur $d + 2e$ et de hauteur h;

— d'un disque cylindrique de diamètre D et de hauteur e (*fig.* 1).

Le volume du manchon est

$$v_1 = \left[\pi\frac{(d+2e)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right] h = \pi(d+e) \times e \times h.$$

Celui du disque est

$$v_2 = \frac{\pi D^2}{4} \times e.$$

Si ϖ désigne le poids volumique du verre, les poids P_1 et P_2 du manchon et du disque ont pour valeur

$$P_1 = \varpi \times v_1$$

et $$P_2 = \varpi \times v_2.$$

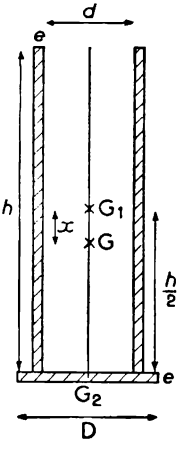


FIG. 1.

Ces poids sont appliqués respectivement en des points G_1 et G_2 situés sur l'axe de symétrie de l'éprouvette et au milieu des hauteurs correspondant à chacune de ses parties.

La résultante des forces de pesanteur est appliquée en un point G, situé à une distance x de G_1 donnée par la relation

$$P_1 \times GG_1 = P_2 \times GG_2,$$

ou

$$P_1 \times x = P_2\left(\frac{h+e}{2} - x\right).$$

Nous tirons de cette équation du premier degré en x

$$x = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \times \frac{h+e}{2}$$

et, en tenant compte des expressions précédentes de P_1 et P_2,

$$x = \frac{v_2}{v_1 + v_2} \times \frac{h+e}{2}.$$

Application numérique :

$d = 4$ cm, $h = 20$ cm, $e = 2$ mm, ou 0,2 cm, $D = 6$ cm.

$$v_1 = \pi(4 + 0{,}2) \times 0{,}2 \times 20 = 16{,}8\,\pi \text{ cm}^3;$$

$$v_2 = \pi \times \frac{36}{4} \times 0{,}2 = 1{,}8\,\pi \text{ cm}^3;$$

$$x = \frac{1{,}8\,\pi}{16{,}8\,\pi + 1{,}8\,\pi} \times \frac{20 + 0{,}2}{2} = \frac{1{,}8}{18{,}6} \times 10{,}1 = 0{,}977 \text{ cm},$$

$$x = \mathbf{0{,}98\ cm}.$$

2° Position du centre de gravité de l'éprouvette et de son contenu. — Le centre de gravité de l'éprouvette à demi remplie d'eau est le point d'application de la résultante du poids de l'éprouvette et du poids de l'eau.

Le poids de l'éprouvette est

$$P = P_1 + P_2 = \varpi\,(v_1 + v_2).$$

Le poids de l'eau est, en désignant par ϖ' le poids volumique de l'eau,

$$P' = \varpi' \times v'.$$

Ces poids sont appliqués le premier au point G le second au point G' situé sur l'axe de symétrie de l'éprouvette à la distance $\frac{h}{4}$ du fond (*fig.* 2).

La résultante de ces forces est appliquée au point I situé à la distance y de G_1 donnée par la relation

$$P \times IG = P' \times IG',$$

ou

$$P(y - GG_1) = P'\left(\frac{h}{4} - y\right).$$

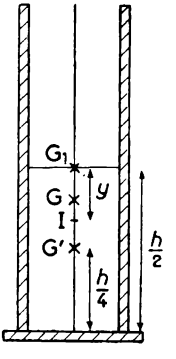


FIG. 2.

La résolution de cette équation du premier degré en y donne

$$y = \frac{1}{P + P'}\left(P \times GG_1 + P' \times \frac{h}{4}\right).$$

Remplaçons P par $\varpi(v_1 + v_2)$, P' par $\varpi' v'$ et GG_1 par x. Nous obtenons

$$y = \frac{\varpi(v_1 + v_2)\,x + \varpi' v' \times \dfrac{h}{4}}{\varpi(v_1 + v_2) + \varpi' v'}.$$

Faisons apparaître le rapport $\dfrac{\varpi}{\varpi'}$:

$$y = \frac{\dfrac{\varpi}{\varpi'}(v_1 + v_2)x + v' \times \dfrac{h}{4}}{\dfrac{\varpi}{\varpi'}(v_1 + v_2) + v'}.$$

Application numérique :

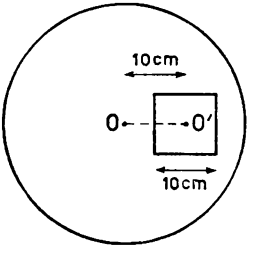
$$\frac{\varpi}{\varpi'} = 2{,}5, \qquad v_1 + v_2 = 16{,}8\,\pi + 1{,}8\,\pi = 18{,}6\,\pi \text{ cm}^3, \qquad \frac{h}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm},$$

$$v' = \pi \frac{d^2}{4} \times \frac{h}{2} = \pi \times \frac{16}{4} \times \frac{20}{2} = 40\,\pi \text{ cm}^3, \quad x = 0{,}977 \text{ cm},$$

$$y = \frac{2{,}5 \times 18{,}6\,\pi \times 0{,}977 + 40\,\pi \times 5}{2{,}5 \times 18{,}6\,\pi + 40\,\pi} = \frac{45{,}43 + 200}{46{,}5 + 40},$$

$$\boldsymbol{y = 2{,}84 \text{ cm}.}$$

11. — Détermination du centre de gravité d'une plaque circulaire évidée.



Déterminer la position du centre de gravité, G, d'une plaque circulaire d'épaisseur uniforme de 40 cm de diamètre dans laquelle on a découpé une ouverture carrée de 10 cm de côté, le centre de symétrie O' de ce carré étant à 10 cm du centre O de la plaque et les côtés de l'ouverture étant parallèles ou perpendiculaires à OO'.

On prendra $\pi = \dfrac{22}{7}$.

Le centre de gravité de la plaque est le point d'application de la résultante, $\vec{P}$, des forces de pesanteur agissant sur cette plaque.

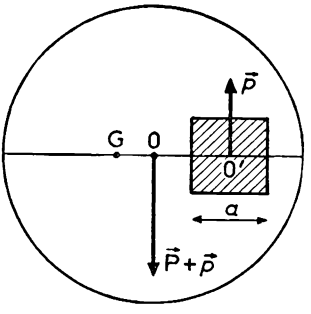
Nous ne modifions en rien cette résultante $\vec{P}$ si nous rebouchons exactement l'ouverture et si nous appliquons au centre de symétrie O'

du carré une force verticale, $\vec{p}$, dirigée vers le haut et égale au poids de la partie rebouchée.

Le centre de gravité de la plaque peut être considéré comme le point d'application de la résultante de deux forces parallèles :

— le poids $\vec{P} + \vec{p}$ de la plaque pleine, appliquée en son centre de symétrie O;

— la force verticale $\vec{p}$, de sens opposé à celui de la force précédente, appliquée en O'.



Cette résultante est appliquée en un point G, situé sur le prolongement du segment OO', du côté de la plus grande force et tel que

$$(P + p)\,OG = p \times O'G,$$

ou
$$(P + p)\,OG = p(OG + OO');$$

par simplification nous avons

$$P \times OG = p \times OO'.$$

Nous en tirons
$$OG = \frac{p}{P} \times OO'.$$

La plaque ayant une épaisseur uniforme, les poids p et P sont dans le rapport des surfaces.

Soient d le diamètre de la plaque et a le côté de l'ouverture carrée. La surface de celle-ci est a^2. La surface de la plaque évidée est

$$\frac{\pi d^2}{4} - a^2.$$

Le rapport de p et P est

$$\frac{p}{P} = \frac{a^2}{\frac{\pi d^2}{4} - a^2} = \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4a^2} - 1}, \qquad \text{d'où} \qquad OG = \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4a^2} - 1} \times OO'.$$

Remarquons que la position du centre de gravité est indépendante de l'orientation des côtés du carré par rapport à son centre O'.

Application numérique :

$d = 40$ cm, $\quad a = 10$ cm, $\quad OO' = a = 10$ cm, $\quad \pi = \frac{22}{7}$.

$$OG = \frac{1}{\frac{22}{7} \times \frac{40^2}{4 \times 10^2} - 1} \times 10 = \frac{70}{22 \times 4 - 7} = \frac{70}{81} = 0{,}864 \text{ cm},$$

$$\mathbf{OG = 0{,}86 \text{ cm}.}$$

12. — Détermination du centre de gravité et du poids d'un mât.

Pour déterminer le centre de gravité et mesurer le poids d'un mât AB, on le place horizontalement sur deux supports, M et N, placés respectivement à 3,75 m et 4 m de l'extrémité A.

Si l'on exerce en A une force verticale $F_1 = 300$ N, le mât est en équilibre sur le support M.

Si l'on exerce en A une force verticale de sens contraire $F_2 = 560$ N, le mât est en équilibre sur le support N. Déterminer le poids du mât et la position de son centre de gravité.

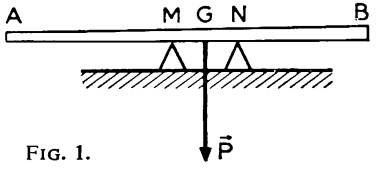


FIG. 1.

Le mât posé sur les supports étant en équilibre, le centre de gravité G est situé entre M et N : en effet, la verticale passant par G doit tomber à l'intérieur de la base de sustentation (*fig.* 1).

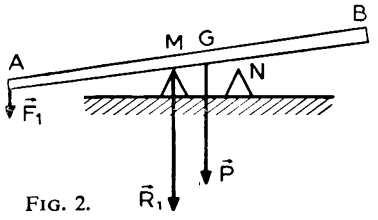


FIG. 2.

Si l'on exerce une force F_1 sur l'extrémité A, le mât est en équilibre sur le support M (*fig.* 2) : la résultante $\vec{R}_1$ des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{P}$ passe par l'arête du support M, ce qui se traduit par la relation

(1) $F_1 \times AM = P \times GM.$

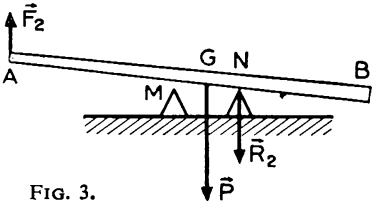


FIG. 3.

Si l'on exerce une force $\vec{F}_2$ sur l'extrémité A, le mât est en équilibre sur le support N (*fig.* 3) : la résultante $\vec{R}_2$ des forces F_2 et P passe par l'arête du support N, ce qui se traduit par la relation

(2) $F_2 \times AN = P \times GN.$

Additionnons les deux relations précédentes :

$$F_1 \times AM + F_2 \times AN = P \times GM + P \times GN$$
$$= P(GM + GN) = P \times MN.$$

Le poids du mât est donc

$$P = \frac{F_1 \times AM + F_2 \times AN}{MN}.$$

La position du centre de gravité est définie par la distance

$$AG = AM + GM.$$

De (1) nous tirons

$$GM = \frac{F_1 \times AM}{P},$$

d'où

$$AG = AM + \frac{F_1 \times AM}{P} = AM\left(1 + \frac{F_1}{P}\right).$$

Application numérique :

$F_1 = 300$ N, $F_2 = 560$ N, $AM = 3{,}75$ m, $AN = 4$ m,

$$MN = AN - AM = 0{,}25 \text{ m}.$$

$$P = \frac{300 \times 3{,}75 + 560 \times 4}{0{,}25} = \frac{3\,365}{0{,}25} = 13\,460 \text{ N},$$

$$\mathbf{P = 13\,500 \text{ N}.}$$

$$AG = 3{,}75\left(1 + \frac{300}{13\,460}\right) = 3{,}75 \times \frac{1\,376}{1\,346} = 3{,}834 \text{ m},$$

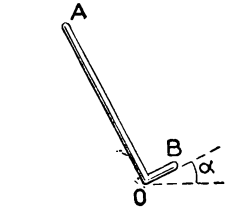
$$\mathbf{AG = 3{,}83 \text{ m}.}$$

CHAPITRE IV

Théorème des moments.

13. — Équilibre d'un levier coudé.

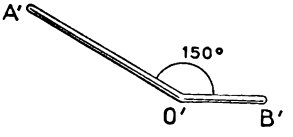
1° Un levier coudé AOB est formé de deux branches perpendiculaires : AO = 80 cm et BO = 10 cm. Il est mobile autour d'un axe perpendiculaire en O au plan de la figure.



La branche OB étant d'abord horizontale et le point A au-dessus de O, on suspend en B un poids de 100 N et l'on agit à l'extrémité A avec une force F assujettie à rester constamment perpendiculaire à OA.

Calculer la valeur de F quand l'équilibre est réalisé et que OB fait avec l'horizontale les angles suivants : $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$.

2° Représenter les résultats par une courbe en portant en abscisses les angles α (en degrés) et en ordonnées les forces F (en N).



3° Un autre levier coudé A'O'B' est formé de deux branches faisant un angle de 150°. Il est également mobile autour d'un axe perpendiculaire en O' au plan de la figure. La branche O'B' est horizontale et O'A' = 2 O'B'.

On suspend en A' et en B' deux poids, P_1 et P_2. Quel doit être leur rapport pour que le levier soit en équilibre?

(Bacc. Rennes.)

1° **Valeur de F.** — Le levier coudé AOB constitue un système rigide, mobile autour d'un axe horizontal se projetant en O. Ce levier est soumis à l'action de deux forces situées dans un même plan (*fig.* 1) :

— le poids $\vec{P}$, dirigé verticalement et appliqué à l'extrémité B,

— la force $\vec{F}$, perpendiculaire à OA et appliquée à l'extrémité A.

Lorsque l'équilibre est réalisé, les moments, par rapport à l'axe, des forces $\vec{F}$ et $\vec{P}$, qui tendent à faire tourner le levier en sens inverse, sont égaux (théorème des moments) :

$$P \times OH = F \times OA,$$

ou

$$P \times b\cos\alpha = F \times a.$$

Nous en tirons

$$F = P \times \frac{b}{a} \times \cos\alpha.$$

Application numérique :

$P = 100$ N,

$b = 10$ cm, ou 0,10 m,

$a = 80$ cm, ou 0,80 m.

$$F = 100 \times \frac{0{,}10}{0{,}80} \times \cos\alpha$$

$$\mathbf{F = 12{,}5\cos\alpha \ N.}$$

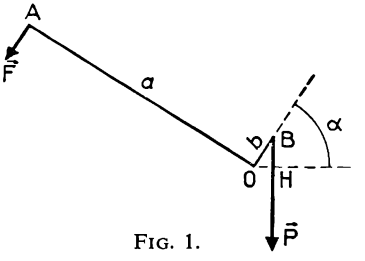


FIG. 1.

Tableau des valeurs de F pour les diverses valeurs de α.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
F	12,5	10,8	8,84	6,25	0

2° Représentation graphique de la fonction $F = f(\alpha)$. — Voir la figure 2.

3° Équilibre du levier A'O'B'. — Le levier coudé A'O'B' est soumis à l'action de deux forces (*fig.* 3) :

— le poids $\vec{P_1}$, appliqué en A' ;

— le poids $\vec{P_2}$, appliqué en B'.

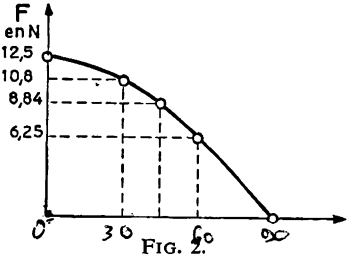


FIG. 2.

Lorsque l'équilibre est réalisé, les moments de ces deux forces par rapport à l'axe sont égaux :

$$P_1 \times O'H' = P_2 \times O'B',$$

ou

$$P_1 \times a'\cos\alpha = P_2 \times b'.$$

Le rapport des deux forces est donc

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b'}{a'\cos\alpha}.$$

Numériquement :

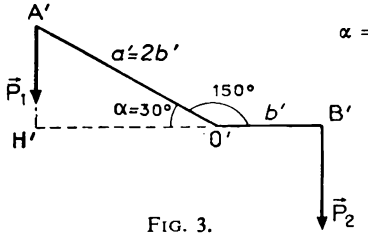


FIG. 3.

$$\alpha = 30°, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad a' = 2\,b'.$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b'}{2\,b'\dfrac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14. — Équilibre d'une plaque circulaire mobile autour d'un axe.

La plaque circulaire évidée, de diamètre $d = 40$ cm, dont le centre de gravité a été déterminé dans le problème n° 11, est supposée mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre O.

On fixe sur sa circonférence extérieure un fil auquel on attache un poids de 0,374 N. Sachant que la plaque pèse 10 N, trouver la position d'équilibre du système.

Lorsque le système est en équilibre, les forces $\vec{P}$ et $\vec{P}'$ tendent à faire tourner le disque en sens opposés (*fig.* 1) et leurs moments par rapport à l'axe de rotation sont égaux (théorème des moments) :

$$P \times OH = P' \times OH'.$$

La position d'équilibre peut être définie par l'angle $\alpha = \widehat{GOZ}$. Cet angle est donné par la relation

$$P \times OG \sin\alpha = P' \times \frac{d}{2},$$

d'où nous tirons

$$\sin\alpha = \frac{P'}{P} \times \frac{d}{2\,OG}.$$

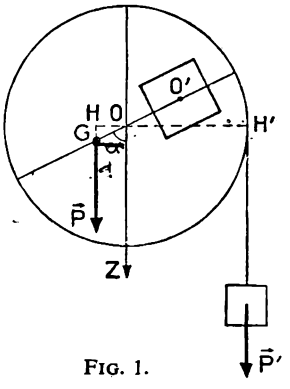


FIG. 1.

Application numérique :

$P = 10$ N, $\quad P' = 0{,}374$ N, $\quad d = 40$ cm, $\quad OG = 0{,}864$ cm.

$$\sin\alpha = \frac{0{,}374}{10} \times \frac{40}{2 \times 0{,}864} = \frac{0{,}748}{0{,}864},$$

$$\sin\alpha = 0{,}866\,8 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A cette valeur de sin α, correspondent deux angles :

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \qquad \text{et} \qquad \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = 120^\circ.$$

Il y a donc deux positions d'équilibre.

La première correspondant à $\alpha = 60^\circ$ (*fig.* 1) est une position d'équilibre stable. En effet, si l'on déplace la plaque de façon à augmenter α, le moment de P augmente, celui de P′ reste constant. La plaque est ramenée à sa position d'équilibre. Si, au contraire, on la déplace de façon à diminuer α, le moment de $\vec{P}$ diminue, celui de $\vec{P}'$ restant constant. La plaque est encore ramenée à sa position d'équilibre.

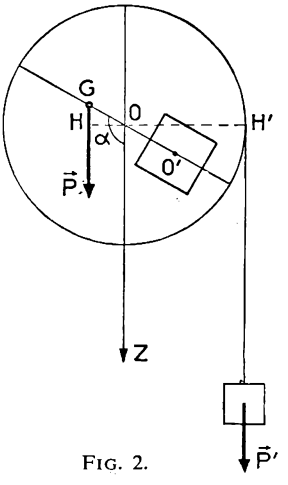
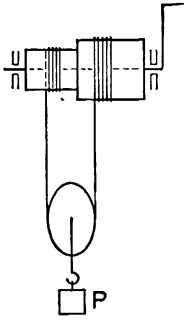


FIG. 2.

La deuxième position, correspondant à $\alpha = 120^\circ$ est une position d'équilibre instable (*fig.* 2). Si l'on déplace en effet la plaque de façon à diminuer α, le moment de P augmente, celui de P′ restant constant. La plaque s'éloigne de sa position d'équilibre et se trouve finalement ramenée à la position d'équilibre stable.

15. — Équilibre d'un treuil différentiel.

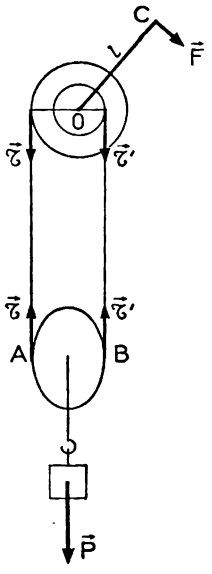


Un treuil différentiel est constitué par deux cylindres coaxiaux solidaires, de rayons différents $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 12$ cm, sur lesquels s'enroulent les extrémités de la corde soutenant la poulie mobile. La manivelle a une longueur de 40 cm. Quel effort faut-il lui appliquer normalement pour soulever une charge de 500 N?

Qu'adviendrait-il si les deux rayons R_1 et R_2 étaient égaux? Interpréter le résultat.

N. B. — La poulie circulaire est vue en perspective.

Effort à fournir pour soulever la charge. — La charge étant suspendue à la poulie mobile, il faut exercer à l'extrémité C de la manivelle de longueur $OC = l$ une force $\vec{F}$ pour maintenir le treuil en équilibre.



La poulie mobile est alors soumise à l'action de trois forces verticales : le poids $\vec{P}$ de la charge et les tensions du fil, $\vec{\mathcal{T}}$ en A et $\vec{\mathcal{T}}'$ en B.

Puisqu'elle est en équilibre, $P = \mathcal{T} + \mathcal{T}'$.

P étant appliqué à égale distance de A et de B,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}'.$$

La relation d'équilibre est donc

$$P = 2\,\mathcal{T}, \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{T} = \frac{P}{2}.$$

Le tambour du treuil est également soumis à l'action de trois forces : les tensions, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, du fil et la force F.

Puisqu'il est en équilibre, la somme des moments des forces $\vec{F}$ et $\vec{\mathcal{T}}'$ qui tendent à le faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, est égal au moment de la tension $\vec{\mathcal{T}}$, qui tend à le faire tourner en sens inverse (théorème des moments) :

$$F \times l + \mathcal{T}' \times R_1 = \mathcal{T} \times R_2.$$

ou, puisque

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' = \frac{P}{2},$$

$$F \times l = \frac{P}{2}(R_2 - R_1).$$

D'où nous tirons

$$F = P \times \frac{R_2 - R_1}{2\,l}.$$

Application numérique :

$P = 500$ N, $\quad R_1 = 10$ cm, $\quad R_2 = 12$ cm, $\quad l = 40$ cm.

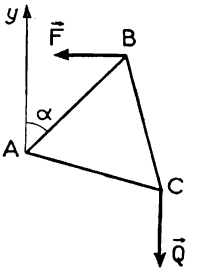
$$F = 500 \times \frac{12 - 10}{2 \times 40}, \qquad F = 12{,}5 \text{ N}.$$

La force F est d'autant plus faible que la différence des rayons est plus petite.

Cas où $R_1 = R_2$. — Si les rayons R_1 et R_2 étaient égaux, la force F serait nulle. Ce résultat est évident. Les tensions $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ auraient alors même moment par rapport à l'axe O et se feraient équilibre. Une force F très faible suffirait pour mettre le treuil en mouvement.

16. — Équilibre d'une plaque triangulaire mobile autour d'un axe horizontal.

Une plaque triangulaire homogène équilatérale, ABC, de poids P est mobile dans un plan vertical autour de son sommet A. Une force Q, verticale et constante, dirigée vers le bas est appliquée en C.



1° Déterminer la force F que l'on doit appliquer en B horizontalement pour maintenir la plaque en équilibre dans une position telle que l'angle de AB avec la verticale Ay soit α.

2° Étudier la variation de F quand on fait varier α de 0 à π.

Application numérique :

$$P = 10\sqrt{3}\ \text{N}, \qquad Q = 10\ \text{N}.$$

(Bac. math. et tech., Clermont.)

1° Force F dans le cas de l'équilibre. — Le centre de gravité de la plaque se trouve, par raison de symétrie, au point d'intersection des médianes du triangle ABC (*fig.* 1). Il est donc situé sur la médiane AH en un point G tel que

$$AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

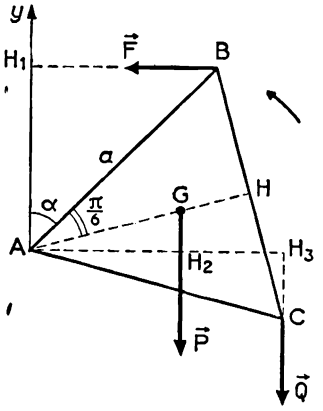


FIG. 1.

La plaque, mobile autour d'un axe horizontal passant par son sommet A, est soumise à l'action de trois forces :

— son poids $\vec{P}$, appliqué en G;

— la force horizontale $\vec{F}$, appliquée en B,

— la force verticale $\vec{Q}$, appliquée en C.

Lorsque la plaque est en équilibre, la somme des moments par rapport à l'axe des forces $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ qui tendent à la faire tourner dans un sens est égale au moment de la force $\vec{F}$ qui tend à la faire tourner en sens contraire :

$$F \times AH_1 = P \times AH_2 + Q \times AH_3. \tag{1}$$

Or

$$AH_1 = a\cos\alpha,$$

$$AH_2 = AG\sin\widehat{GAy} = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$AH_3 = AC\sin\widehat{ACH_3} = AC\sin(\pi - \widehat{CAy}) = AC\sin CAy = a\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

La relation (1) devient

$$F \times a\cos\alpha = P \times \frac{a}{\sqrt{3}} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + Q \times a \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right),$$

d'où nous tirons

$$F = \frac{P}{\sqrt{3}} \times \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha} + Q \times \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha}.$$

Cette relation peut se mettre sous une forme plus simple si nous développons les deux sinus, en utilisant la formule

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a :$$

$$F = \frac{P}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) + Q\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

$$F = \frac{P}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\alpha \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + Q\left(\operatorname{tg}\alpha \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$F = \frac{P + Q}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\sqrt{3}} + Q\sqrt{3}\right).$$

Application numérique :

$$P = 10\sqrt{3}\ \text{N}, \quad Q = 10\ \text{N}.$$

$$F = \frac{10\sqrt{3} + 10}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 10\sqrt{3}\right),$$

$$F = \frac{10\sqrt{3} + 10}{2}(\operatorname{tg}\alpha + 1).$$

$$\mathbf{F = 13{,}66\,(\operatorname{tg}\alpha + 1)\ N.}$$

2° Étude de la variation de F quand α varie de 0 à π. —

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
$1+\operatorname{tg}\alpha$	1	1,577	2	2,732		$-0{,}732$	0	0,423	1
F	13,66	21,54	27,32	37,32	$+\infty$	$-\infty$	-10	0	5,79	13,66

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, AB est perpendiculaire à Ay; le moment de F par rapport à A est nul puisque F passe par A, F tend vers $\pm\infty$.

Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, la force $\vec{F}$ tend à éloigner B de l'axe Ay; elle est de sens opposé au précédent.

Si $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, la force $\vec{F}$ est nulle. Les forces $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ se font équilibre.

On peut donner de ces variations la courbe représentative ci-dessous (*fig.* 2).

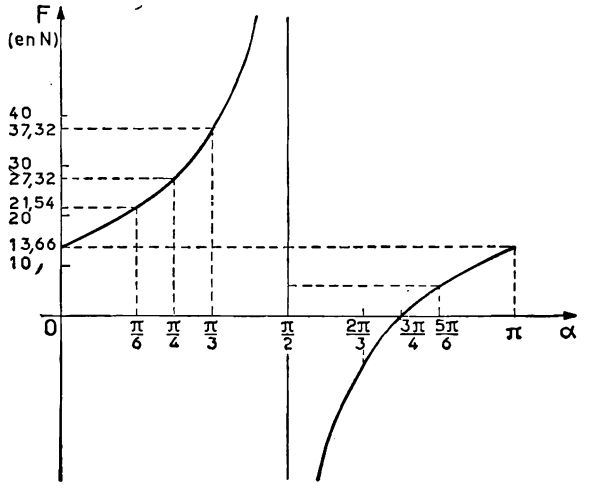


FIG. 2.

CHAPITRE V

Balance.

17. — Étude de la sensibilité d'une balance.

On envisage une balance à bras de fléau égaux : OA = OB = *l*.

La balance est mobile autour de l'axe O et son centre de gravité se trouve en G sur l'aiguille OH à une distance *a* de O.

A l'équilibre, l'aiguille est verticale.

1° Calculer l'angle θ dont tourne l'aiguille lorsqu'on place une surcharge de masse *m* sur l'un des plateaux.

Application numérique : *l* = 20 cm, *a* = 0,1 cm, masse du fléau de la balance : M = 200 g.

2° Sachant que l'extrémité, H, de l'aiguille OH, de longueur égale à 25 cm, se déplace devant une règle horizontale graduée en millimètres, calculer la plus petite masse que cette balance peut déceler. On admettra qu'on peut évaluer le demi-millimètre. *(S. P. C. N., Nancy.)*

1° Angle dont tourne l'aiguille. — Le fléau de la balance est un solide ayant un axe fixe O (arête du couteau central).

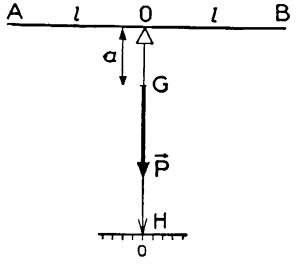


FIG. 1.

Lorsqu'il est en équilibre (plateaux enlevés) l'aiguille est verticale et son extrémité H est au zéro de la graduation (*fig.* 1). Son centre de gravité G se trouve sur la verticale passant par l'axe.

Si l'on accroche les deux plateaux, de poids $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$, l'aiguille reste verticale (*fig.* 2). Ces deux poids ont même moment par rapport à l'axe (théorème des moments) :

$$P_1 \times OA = P_2 \times OB.$$

Puisque $OA = OB = l$,

il vient $P_1 = P_2$.

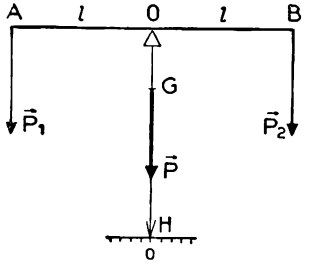


FIG. 2.

Lorsque nous plaçons sur l'un des plateaux une surcharge de poids $\vec{p}$, le fléau s'incline d'un angle θ (*fig.* 3).

Appliquons le théorème des moments. Les seules forces à considérer sont le poids $\vec{p}$ de la surcharge et le

poids $\vec{P}$ du fléau (les deux plateaux ont même poids et restent toujours à la même distance de l'axe O).

L'équation d'équilibre est donc

$$p' \times OC = P \times OD,$$

ou

$$p' \times l \times \cos\theta = P \times a \times \sin\theta.$$

Nous tirons de cette relation

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{p'}{P} \times \frac{l}{a}.$$

En un même lieu, les poids sont proportionnels aux masses; on peut écrire

$$\frac{p'}{P} = \frac{m}{M}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{m}{M} \times \frac{l}{a}.$$

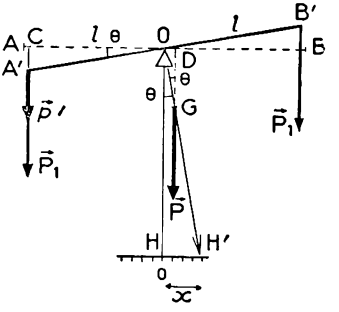


FIG. 3.

Application numérique :

$$l = 20 \text{ cm}, \qquad a = 0{,}1 \text{ cm}, \qquad M = 200 \text{ g},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m}{200} \times \frac{20}{0{,}1},$$

$$\operatorname{tg}\theta = m.$$

La tangente de l'angle θ est numériquement égale à la masse de la surcharge, exprimée en grammes.

2° Sensibilité de la balance. — De la relation (1), nous tirons

$$(2) \qquad m = M \times \frac{a}{l} \times \operatorname{tg}\theta.$$

Si nous désignons par d la longueur de l'aiguille et par x le déplacement de l'index devant la règle, l'angle θ est donné par la relation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{HH'}{OH} = \frac{x}{d}.$$

En remplaçant $\operatorname{tg}\theta$ par sa valeur dans la relation (2), nous obtenons l'expression de la masse de la surcharge en fonction du déplacement de l'aiguille devant la règle :

$$(3) \qquad m = M \times \frac{a}{l} \times \frac{1}{d} \times x.$$

La plus petite masse que la balance peut déceler est donnée en grammes par la relation (3), dans laquelle x a la plus petite valeur qui peut être évaluée.

Cette masse représente **la sensibilité** de la balance.

Application numérique :

$M = 200$ g, $a = 0{,}1$ cm, $l = 20$ cm, $d = 25$ cm, $x = 0{,}5$ mm, ou $0{,}05$ cm,

$$m = 200 \times \frac{0{,}1}{20} \times \frac{1}{25} \times 0{,}05,$$

$$m = \frac{2}{1\,000}\ \text{g, ou 2 mg.}$$

18. — Étude de la justesse d'une balance.

Chacun des bras du fléau d'une balance a une longueur très voisine de 75 millimètres. Les plateaux n'étant pas chargés, lorsque l'équilibre est réalisé, l'aiguille solidaire du fléau est au zéro de la graduation.

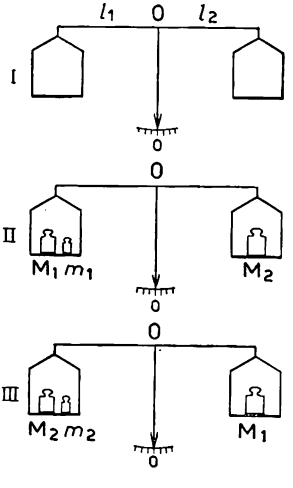
Pour éprouver la justesse de cette balance on procède aux opérations suivantes.

a) On prend dans la boîte de masses les deux masses marquées 100 g et l'on en pose une sur chaque plateau. Pour réaliser l'équilibre (aiguille au zéro), il a fallu placer une masse $m_1 = 0{,}9$ mg sur le plateau de gauche.

b) On enlève toutes les masses et l'on intervertit les deux masses de 100 g. Pour réaliser l'équilibre (aiguille au zéro) il a fallu placer une masse $m_2 = 1{,}7$ mg sur le plateau de gauche.

La balance est-elle juste? Si non quelle est la différence de longueur des deux bras du fléau? Quelle est aussi la différence des masses marquées 100 g?

Désignons par l_1 et l_2 les longueurs exactes des deux bras du fléau et par M_1 et M_2 les valeurs exactes des deux masses, marquées 100 g.



Représentons schématiquement les trois équilibres successifs de la balance.

Dans l'équilibre (1), les poids des plateaux vides ont même moment par rapport à l'axe (théorème des moments). Cette condition est encore réalisée dans les deux autres équilibres.

Si la balance est juste, $l_1 = l_2$; la masse $M_1 + m_1$ doit être égale à la masse M_2. Donc, si l'on transporte la masse M_2 dans le plateau de gauche, on doit réaliser l'équilibre en mettant $M_1 + m_1$ dans le plateau de droite. Ce n'est pas le cas. La balance n'est donc pas juste et l_1 est différent de l_2.

Appliquons le théorème des moments aux équilibres (II) et (III). Les masses M_1, M_2, m_1 et m_2, exprimées en grammes, ont pour poids correspondants $M_1 g$, $M_2 g$, $m_1 g$ et $m_2 g$, g représentant l'intensité de la pesanteur.

Les seuls moments qui interviennent sont ceux de ces forces.

2e équilibre : (1) $(M_1 g + m_1 g)\, l_1 = M_2 g\, l_2$,

3e équilibre : (2) $(M_2 g + m_2 g)\, l_1 = M_1 g\, l_2$.

En multipliant membre à membre ces deux équations nous obtenons :

$$(M_1 + m_1)(M_2 + m_2)\, l_1^2 = M_1 \times M_2 \times l_2^2,$$

d'où
$$\frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{(M_1 + m_1)(M_2 + m_2)}{M_1 M_2},$$

$$\frac{l_2^2 - l_1^2}{l_1^2} = \frac{(M_1 + m_1)(M_2 + m_2) - M_1 M_2}{M_1 M_2},$$

$$\frac{(l_2 - l_1)(l_2 + l_1)}{l_1^2} = \frac{m_1 M_2 + m_2 M_1 + m_1 m_2}{M_1 M_2}$$

et enfin
$$l_2 - l_1 = \frac{l_1^2}{l_1 + l_2}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_1}{M_1} \times \frac{m_2}{M_2}\right).$$

Les deux bras du fléau ont des longueurs très voisines : $l_1 + l_2 \simeq 2\, l_1$. Il en est de même des deux masses M_1 et M_2, qui peuvent être confondues. La relation précédente devient

$$l_2 - l_1 = \frac{l_1^2}{2\, l_1}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_1} + \frac{m_1 \times m_2}{M_1^2}\right),$$

ou
$$l_2 - l_1 = \frac{l_1}{2}\left(\frac{m_1 + m_2}{M_1} + \frac{m_1 \times m_2}{M_1^2}\right).$$

En divisant membre à membre les deux équations (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{M_2}{M_1},$$

d'où
$$M_1^2 + m_1 M_1 = M_2^2 + m_2 M_2,$$

$$M_1^2 - M_2^2 = m_2 M_2 - m_1 M_1,$$

$$(M_1 - M_2)(M_1 + M_2) = m_2 M_2 - m_1 M_1$$

et
$$M_1 - M_2 = \frac{m_2 M_2 - m_1 M_1}{M_1 + M_2}.$$

Les masses, M_2 et M_1, sont très voisines. On peut donc poser

$$m_2 M_2 - m_1 M_1 \approx (m_2 - m_1) M_1,$$

$$M_1 + M_2 \approx 2\, M_1$$

et, par suite,

$$M_1 - M_2 = \frac{m_2 - m_1}{2}.$$

Application numérique :

$$l_1 = 75 \text{ mm}; \qquad M_1 = 100 \text{ g};$$

$m_1 = 0{,}9$ mg, ou 0,0009 g; $m_2 = 1{,}7$ mg, ou 0,001 7 g.

$$l_2 - l_1 = \frac{75}{2}\left(\frac{0{,}000\,9 + 0{,}001\,7}{100} + \frac{0{,}000\,9 \times 0{,}001\,7}{10\,000}\right),$$

$$l_2 - l_1 = \frac{75}{2}\left(\frac{26}{10^6} + \frac{153}{10^{12}}\right) \approx \frac{75}{2} \times \frac{26}{10^6},$$

$$l_2 - l_1 = \frac{975}{10^6} \text{ mm}, \qquad \mathbf{l_2 - l_1 = 0{,}000\,975 \text{ mm}},$$

$$M_1 - M_2 = \frac{0{,}001\,7 - 0{,}000\,9}{2} = \frac{4}{10^4} \text{ g}, \qquad \mathbf{M_1 - M_2 = 0{,}4 \text{ mg}}.$$

19. — Étude d'une balance romaine.

1° Le curseur d'une balance romaine a une masse de 1 000 g. Le fléau est horizontal quand, à vide, le curseur est au trait 0. La distance des deux couteaux est 10 cm. Où doit-on placer le curseur pour peser une masse de 4 kg?

2° Si l'on admet qu'on peut apprécier un déplacement du fléau quand le curseur se déplace de 1 mm, quelle est la sensibilité de la balance?

1° Position du curseur. — La balance romaine est un solide ayant un axe fixe horizontal (arête O du couteau).

Lorsqu'elle est en équilibre à vide, le fléau est horizontal et le curseur est au point B, zéro de la graduation *(fig. 1)*.

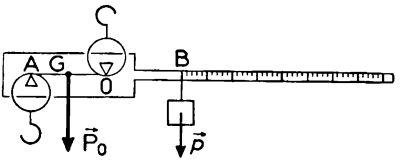


FIG. 1.

Le fléau est alors soumis à deux forces verticales :

— son poids $\vec{P}_0 = M_0 \times \vec{g}$ appliqué en son centre de gravité G;

— le poids $\vec{p} = m \times \vec{g}$ du curseur.

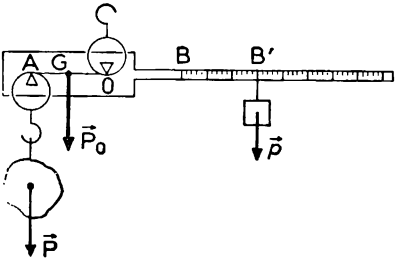


FIG. 2.

Puisqu'il est en équilibre, la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe O est nulle (théorème des moments) :

$$P_0 \times OG - p \times OB = 0,$$

ou (1) $P_0 \times OG = p \times OB.$

Lorsque nous suspendons une masse M de poids $P = M \times g$ en A l'équilibre est rompu. Pour le rétablir, nous déplaçons le curseur sur la règle d'une longueur $BB' = l$ *(fig. 2)*.

Si nous désignons par d la distance OA des deux couteaux, l'application du théorème des moments donne la relation

$$P \times d + P_0 \times OG - p(OB + l) = 0,$$

et, tenant compte de l'égalité (1),

$$P \times d = p \times l.$$

Nous en tirons $$l = \frac{P}{p} \times d.$$

Le rapport des poids de deux corps est, en un même lieu, égal au rapport de leurs masses, comme le montre la relation

$$\frac{P}{p} = \frac{M \times g}{m \times g} = \frac{M}{m}.$$

Nous pouvons donc écrire

(2) $$l = \frac{M}{m} \times d.$$

Application numérique :

$$M = 4 \text{ kg},$$
$$m = 1\,000 \text{ g}, \quad \text{ou} \quad 1 \text{ kg}, \qquad d = 10 \text{ cm},$$
$$l = \frac{4}{1} \times 10, \qquad \boldsymbol{l = 40 \text{ cm}.}$$

2° Sensibilité de la balance. — Si nous déplaçons le curseur d'une longueur $\Delta l = 1$ mm à partir de la position B', il faut, pour rétablir l'équilibre, ajouter ou retrancher une masse ΔM à la masse M. Dans ces conditions, la relation (2) s'écrit

(3) $$l + \Delta l = \frac{M + \Delta M}{m} \times d.$$

En retranchant membre à membre (2) de (3) nous obtenons

$$\Delta l = \frac{\Delta M}{m} \times d,$$

et, par suite, $$\Delta M = m \times \frac{\Delta l}{d}.$$

Application numérique :

$$m = 1\,000 \text{ g}, \qquad \Delta l = 1 \text{ mm},$$
$$d = 10 \text{ cm}, \qquad \text{ou} \qquad 100 \text{ mm},$$
$$\Delta M = 1\,000 \times \frac{1}{100}, \qquad \boldsymbol{\Delta M = 10 \text{ g}.}$$

La balance n'est donc pas très sensible.

Remarque. — Nous aurions pu trouver la relation précédente en appliquant à la relation (2) le théorème des variations relatives

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta M}{M},$$

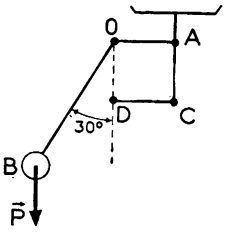
d'où

$$\Delta M = M \times \frac{\Delta l}{l} = M \times \Delta l \times \frac{m}{Md},$$

$$\Delta M = m \times \frac{\Delta l}{d}.$$

20. — Étude d'un pèse-lettre.

Un pèse-lettre est composé d'un levier coudé AOB, mobile autour d'un axe fixe O perpendiculaire au plan de la figure. Les barres AC et CD qui maintiennent le plateau horizontal sont articulées en A, C et D.



A vide, le bras OA est horizontal. L'autre bras fait alors un angle $\alpha = 30^o$ avec la verticale.

On donne OA = 2 cm, OB = 10 cm, la masse de la sphère B, M = 50 g. La masse du levier est supposée négligeable devant celle de la sphère. Quelle masse faut-il placer sur le plateau pour que OB fasse un angle de 45°, puis de 60°, avec la verticale? La déviation angulaire est-elle proportionnelle à la charge?

Lorsque le pèse-lettre est en équilibre (plateau vide), le levier AOB est soumis à l'action de deux forces verticales (*fig.* 1) :

— le poids $\vec{P}$ de la masse M, appliqué en son centre de gravité, B;

— le poids $\vec{P'}$ du plateau, appliqué en A.

La somme algébrique des moments de ces deux forces par rapport à l'axe est nulle (théorème des moments) :

$$P \times BH - P' \times OA = 0.$$

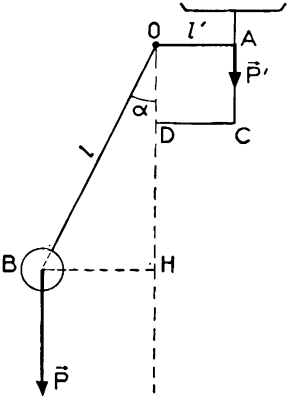


FIG. 1.

Si l et l' représentent les longueurs des deux bras du levier, cette relation est équivalente à

(1) $\quad P \times l \times \sin\alpha = P' \times l.$

Lorsque nous plaçons une charge, de masse x et de poids $\vec{P}_x$, sur le plateau, le levier tourne d'un angle β autour de l'axe O (*fig.* 2). A l'équilibre, la somme algébrique des moments des forces qui lui sont appliquées est nulle :

$$P \times B'H' - (P' + P_x) \times OK = 0,$$

relation équivalente à

$$P \times l \times \sin(\alpha + \beta) = (P' + P_x) \times l' \times \cos\beta.$$

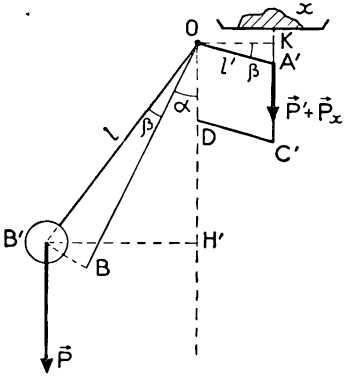


FIG. 2.

Or $\qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

La relation précédente devient

$$P \times l \times \sin\alpha\cos\beta + P \times l \times \cos\alpha\sin\beta = P' \times l' \times \cos\beta + P_x \times l' \times \cos\beta.$$

Divisons tous les termes par $\cos\beta$:

$$P \times l \times \sin\alpha + P \times l \times \cos\alpha \times \mathrm{tg}\beta = P' \times l' + P_x \times l'.$$

En tenant compte de la relation

(1) $\qquad P \times l \times \sin\alpha = P' \times l',$

la relation précédente devient

$$P \times l \times \cos\alpha \times \mathrm{tg}\beta = P_x \times l'.$$

Nous en tirons

$$P_x = P \times \frac{l}{l'} \times \cos\alpha \times \mathrm{tg}\beta.$$

En posant $P = M \times g$ et $P_x = x \times g$ nous obtenons

$$x = M \times \frac{l}{l'} \times \cos\alpha \times \mathrm{tg}\beta.$$

Application numérique :

$M = 50$ g, $\quad l = 10$ cm, $\quad l' = 2$ cm, $\quad \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$x = 50 \times \frac{10}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \mathrm{tg}\beta,$$

(2) $\qquad x = 125\sqrt{3} \times \mathrm{tg}\beta.$

Si $\widehat{B'OD} = 45°$, $\beta = 15°$, $\operatorname{tg}\beta = 0{,}268$,

$$x = 58 \text{ g.}$$

Si $\widehat{B'OD} = 60°$, $\beta = 30°$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$x = 125 \text{ g.}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{125\sqrt{3}}x.$$

Nous remarquons que, dans le cas général, la déviation angulaire β n'est pas proportionnelle à la charge.

Si β est un petit angle, nous pouvons confondre l'angle, exprimé en radians, avec sa tangente et écrire

$$\beta = \frac{1}{125\sqrt{3}}x.$$

La déviation angulaire est proportionnelle à la charge.

On admet généralement qu'un angle peut être confondu avec sa tangente lorsqu'il est inférieur à $\frac{1}{10}$ radian. Cherchons à quelle charge correspond cet angle limite. La relation (2) nous donne

$$x_0 = 125\sqrt{3} \times \frac{1}{10},$$

$$x_0 = 21{,}6 \text{ g.}$$

Nous pouvons donc admettre que la graduation de l'appareil porte des divisions également espacées de la division 0 à la division 20 environ.

CHAPITRE VI

Masse volumique et densité.

21. — Détermination de la densité et de la masse volumique d'un solide.

Pour déterminer la masse volumique d'un solide, on utilise un flacon à densité d'environ 50 cm^3 et l'on fait les opérations suivantes, après remplissage à 0 °C :

tare équilibre flacon plein d'eau + corps + 80,03 g;
tare équilibre flacon plein d'eau + 82,08 g;
tare équilibre flacon contenant le corps et de l'eau + 80,64 g.

Calculer la densité, puis la masse volumique du corps (masse volumique de l'eau à 0 °C : 0,999 80 g/cm^3).

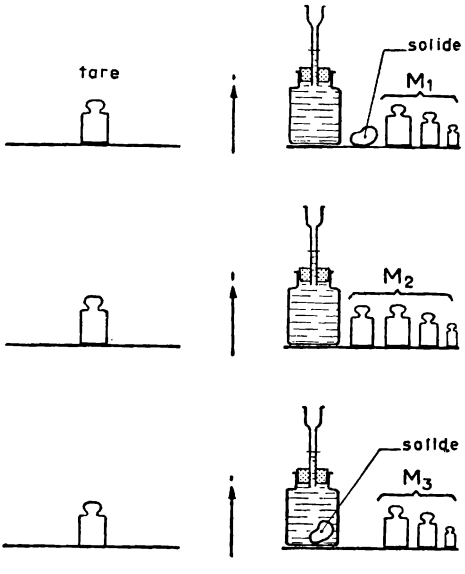
Trouver une limite supérieure de l'erreur relative commise dans la mesure de ces grandeurs.

Avec combien de chiffres significatifs faut-il écrire chacun des résultats?

On supposera négligeable l'erreur commise sur la masse volumique de l'eau.

La densité d du solide par rapport à l'eau est, par définition, le rapport de la masse M du solide à la masse M′ d'un égal volume d'eau :

$$(1) \quad d = \frac{M}{M'}.$$



Représentons schématiquement les trois équilibres.

La masse du solide est

$$M = M_2 - M_1.$$

La masse M′ d'un égal volume d'eau est

$$M' = M_3 - M_1.$$

La densité du corps solide est

$$(2) \quad d = \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_1}.$$

D'autre part, si V représente le volume du

solide, la masse volumique de celui-ci est $\mu = \frac{M}{V}$ et celle de l'eau

$$\mu' = \frac{M'}{V}.$$

Dans l'expression (1), divisons le numérateur et le dénominateur par V :

$$d = \frac{\frac{M}{V}}{\frac{M'}{V}} = \frac{\mu}{\mu'}.$$

La masse volumique du solide est donc

(3) $$\mu = d \times \mu'.$$

Application numérique :

$$M_1 = 80{,}03 \text{ g}, \quad M_2 = 82{,}08 \text{ g}, \quad M_3 = 80{,}64 \text{ g},$$

$$\mu' = 0{,}999\,80 \text{ g/cm}^3.$$

$$d = \frac{82{,}08 - 80{,}03}{80{,}64 - 80{,}03} = \frac{2{,}05}{0{,}61},$$

$$\boldsymbol{d = 3{,}360\,6 \ldots.}$$

$$\mu = d \times 0{,}999\,80 = \frac{2{,}05 \times 0{,}999\,80}{0{,}61},$$

$$\boldsymbol{\mu = 3{,}359\,9 \ldots.}$$

Précision de la mesure. — Le théorème des erreurs relatives maximales appliqué à l'expression (2) donne

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta (M_2 - M_1)}{M_2 - M_1} - \frac{\Delta (M_3 - M_1)}{M_3 - M_1}.$$

Chacune des masses est mesurée à 1 cg près :

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 = \Delta M_3 = 0{,}01 \text{ g (en valeur absolue).}$$

Puisque nous ne connaissons pas le sens dans lequel est commise l'erreur sur chaque pesée, nous nous plaçons dans l'hypothèse la plus défavorable et nous posons

$$\Delta (M_2 - M_1) = \Delta M_2 + \Delta M_1 = 0{,}02 \text{ g},$$
$$\Delta (M_3 - M_1) = \Delta M_3 + \Delta M_1 = 0{,}02 \text{ g},$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}02}{2{,}05} + \frac{0{,}02}{0{,}61} = \frac{42{,}56}{1\,000}.$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta d}{d} < \frac{5}{100}}.$$

Ce rapport caractérise la précision de la mesure.

D'autre part, de l'expression (3) nous tirons

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta\mu'}{\mu'}.$$

L'erreur $\frac{\Delta\mu'}{\mu'}$ est supposée négligeable.

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta d}{d}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{5}{100}.$$

Les deux résultats sont donc connus avec la même précision.

Expression du résultat de la mesure des deux grandeurs. — De l'expression $\frac{\Delta d}{d} = \frac{5}{100}$, nous tirons l'erreur absolue maximale (ou incertitude) commise dans la mesure de d :

$$\Delta d = \frac{5}{100} d = \frac{5}{100} \times 3{,}360\,6,$$
$$\Delta d \approx 0{,}17.$$

Dans la valeur de d, nous avons une incertitude de près de 2 unités sur la première décimale. Nous supprimerons donc les décimales qui suivent et nous écrirons le résultat de la mesure sous la forme

$$3{,}4 - 0{,}2 \leqslant d \leqslant 3{,}4 + 0{,}2,$$
$$3{,}2 \leqslant d \leqslant 3{,}6,$$

ou encore

$$d = 3{,}4 \pm 0{,}2.$$

De même, de l'expression $\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{5}{100}$, nous tirons l'erreur absolue maximale commise dans la mesure de μ :

$$\Delta\mu = \frac{5}{100}\mu = \frac{5}{100} \times 3{,}359\,9 \text{ g/cm}^3,$$
$$\Delta\mu = 0{,}17 \text{ g/cm}^3.$$

Comme dans le cas précédent, nous écrirons

$$3{,}4 \text{ g/cm}^3 - 0{,}2 \text{ g/cm}^3 \leqslant d \leqslant 3{,}4 \text{ g/cm}^3 + 0{,}2 \text{ g/cm}^3,$$
$$3{,}2 \text{ g/cm}^3 \leqslant d \leqslant 3{,}6 \text{ g/cm}^3,$$

ou encore

$$\mu = 3{,}4 \text{ g/cm}^3 \pm 0{,}2 \text{ g/cm}^3.$$

Dans les valeurs numériques de d et de μ, le deuxième chiffre significatif n'est connu qu'à deux unités près.

Remarques. — 1° Compte tenu de l'incertitude des pesées, la densité et la masse volumique du solide, exprimées en g/cm³, sont représentées par le même nombre. Ce résultat pouvait être prévu. En effet, les grandeurs d et μ sont liées par la relation

$$\mu = d \times 0{,}999\,80 \text{ g/cm}^3.$$

Nous en tirons

$$\frac{d}{\mu} = \frac{1}{0{,}999\,80}$$

et

$$\frac{d-\mu}{\mu} = \frac{1-0{,}999\,80}{0{,}999\,80} \approx \frac{2}{10\,000}.$$

En confondant ces deux grandeurs nous commettons une erreur relative négligeable devant celle qui est commise dans la mesure de chacune de ces grandeurs.

2° Si l'on exprime la masse volumique en kg/m³ la densité n'est pas donnée par un nombre voisin de la masse volumique :

$$\mu = 3\,359{,}9 \text{ kg/m}^3,$$
$$d = 3{,}360\,6.$$

22. — Détermination de la variation relative de volume accompagnant le mélange d'eau et d'alcool.

La densité, à 15 °C, de l'alcool éthylique par rapport à l'eau est 0,794 33. Celle d'un mélange à 50 volumes d'alcool pour 50 volumes d'eau est 0,943 37. Montrer que le mélange s'est fait avec variation de volume. Calculer la variation relative de volume.

La densité du mélange alcool-eau par rapport à l'eau est égale au rapport de la masse m du mélange à la masse m' du même volume d'eau.

Désignons par μ_1 et μ_2 les masses volumiques de l'alcool et de l'eau, par v_1 et v_2 les volumes d'alcool et d'eau avant le mélange, par v le volume du mélange.

Nous avons

$$m = \mu_1 \times v_1 + \mu_2 \times v_2,$$
$$m' = \mu_2 \times v$$

et

$$d = \frac{m}{m'} = \frac{\mu_1 \times v_1 + \mu_2 \times v_2}{\mu_2 \times v}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par μ_2 :

$$d = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} \times v_1 + v_2}{v}.$$

En posant $\frac{\mu_1}{\mu_2} = d_1$, densité de l'alcool par rapport à l'eau, nous obtenons

(1) $$d = \frac{d_1 \times v_1 + v_2}{v}.$$

Si les volumes v_1 et v_2 sont égaux et s'il n'y a pas de variation de volume du fait du mélange, $v = 2\,v_1$, la densité d a pour valeur

$$d = \frac{v_1}{2\,v_1} \times (d_1 + 1) = \frac{d_1 + 1}{2}.$$

C'est la moyenne des densités des deux constituants.
Calculons cette densité :

$$d = \frac{0{,}794\,33 + 1}{2} = 0{,}897\,165.$$

La densité réelle du mélange étant supérieure à ce nombre il faut donc que le volume v du mélange soit inférieur à la somme des volumes des constituants.
Le mélange se fait avec diminution de volume : on dit qu'il y a contraction.
Pour avoir le volume du mélange nous utiliserons la relation (1) :

$$v = \frac{d_1 \times v_1 + v_2}{d}.$$

La variation relative de volume est

$$\frac{v - (v_1 + v_2)}{v_1 + v_2} = \frac{d_1 \times v_1 + v_2}{d(v_1 + v_2)} - 1.$$

Si nous prenons $v_1 = v_2$ nous avons

$$\frac{v - 2\,v_1}{2\,v_1} = \frac{d_1 + 1}{2\,d} - 1 = \frac{d_1 + 1 - 2\,d}{2\,d}.$$

Application numérique :

$$d_1 = 0{,}794\,33, \qquad d = 0{,}943\,37,$$

$$\frac{v - 2\,v_1}{2\,v_1} = \frac{0{,}794\,33 + 1 - 2 \times 0{,}943\,37}{2 \times 0{,}943\,37},$$

$$\frac{v - 2\,v_1}{2\,v_1} = \frac{1{,}794\,33 - 1{,}886\,74}{1{,}886\,74} = -\frac{0{,}092\,41}{1{,}886\,74},$$

$$\frac{v - 2\,v_1}{2\,v_1} = -\frac{49}{1\,000}.$$

Le signe — indique une diminution de volume.

23. — Détermination de la composition d'un alliage de cuivre et d'argent.

Un alliage de cuivre et d'argent a pour masse volumique 10,2 g/cm³. La masse volumique du cuivre est 8,9 g/cm³, celle de l'argent, 10,4 g/cm³. Quelle est la composition de l'alliage?

Soient x et y les masses de cuivre et d'argent contenues dans 100 g d'alliage; x et y sont liés par la relation

(1) $$x + y = 100.$$

Soient μ_1, μ_2 et μ les masses volumiques du cuivre, de l'argent et de l'alliage ($\mu_1 < \mu < \mu_2$). Le volume du cuivre est $v_1 = \frac{x}{\mu_1}$, celui de l'argent est $v_2 = \frac{y}{\mu_2}$ et celui de l'alliage, $v = \frac{100}{\mu}$.

Si nous supposons que l'alliage des deux métaux se fait sans variation de volume, nous pouvons écrire

$$v_1 + v_2 = v,$$

ou

(2) $$\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} = \frac{100}{\mu}.$$

Le système des deux équations (1) et (2) permet de déterminer x et y. Nous en tirons

$$x = 100\,\frac{\mu_1(\mu_2 - \mu)}{\mu(\mu_2 - \mu_1)}$$

et

$$y = 100\,\frac{\mu_2(\mu - \mu_1)}{\mu(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Application numérique :

$$\mu_1 = 8{,}9 \text{ g/cm}^3,\ \mu_2 = 10{,}4 \text{ g/cm}^3,\ \mu = 10{,}2 \text{ g/cm}^3.$$

$$x = 100\,\frac{8{,}9\,(10{,}4 - 10{,}2)}{10{,}2\,(10{,}4 - 8{,}9)} = \frac{890 \times 0{,}2}{10{,}2 \times 1{,}5}, \qquad x = 11{,}63 \text{ g}.$$

$$y = 100\,\frac{10{,}4\,(10{,}2 - 8{,}9)}{10{,}2\,(10{,}4 - 8{,}9)} = \frac{1\,040 \times 1{,}3}{10{,}2 \times 1{,}5}, \qquad y = 88{,}37 \text{ g}.$$

L'alliage contient donc

88,4 % d'argent et 11,6 % de cuivre.

CHAPITRE VII

Travail et puissance. Machines simples.

24. — Puissance mise en jeu pour extraire l'eau d'un puits à l'aide d'un treuil.

La manivelle d'un treuil a 60 cm de longueur; le cylindre sur lequel s'enroule la corde a un rayon de 15 cm.

Le treuil est utilisé pour tirer l'eau d'un puits dont la profondeur est 10 m; le seau employé contient 10 litres d'eau.

1° Quel est, en newtons, l'effort exercé sur la manivelle quand on tire un seau d'eau?

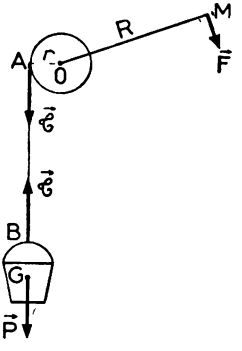
2° Quel est, en joules, le travail effectué pour tirer 1 hectolitre d'eau?

3° Quel est l'espace parcouru par l'extrémité de la manivelle et combien faut-il faire de tours pour tirer un seau d'eau?

4° Quelle puissance moyenne faut-il mettre en jeu pour tirer 10 hectolitres d'eau à l'heure?

Poids de 1 litre d'eau : 9,81 newtons.

(Bacc., Montpellier.)



1° Le seau rempli d'eau est soumis à l'action de deux forces :

— le poids $\vec{P}$ de l'eau (en négligeant le poids du seau);

— la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du fil.

Puisqu'il est en équilibre, $\mathcal{T} = P$.

Le tambour du treuil est soumis à l'action de deux forces :

— la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du fil, de module égal à celui de $\vec{P}$.

— la force $\vec{F}$ exercée sur la manivelle.

Le treuil est en équilibre. La somme algébrique des moments des forces $\vec{\mathcal{T}}$ et $\vec{F}$ par rapport à l'axe est nulle (théorème des moments) :

$$P \times r - F \times R = 0.$$

Cette relation donne F :

$$F = P \times \frac{r}{R}.$$

Application numérique :

Pour un volume d'eau v égal à 10 litres, $P = 9{,}81 \times 10 = 98{,}1$ N;

$r = 15$ cm, ou 0,15 m; $R = 60$ cm, ou 0,60 m.

$$F = 98{,}1 \times \frac{0{,}15}{0{,}60} = 24{,}525 \text{ N}, \qquad \mathbf{F = 24{,}5\ N.}$$

2° Pour tirer un volume d'eau égal à V litres, il faut soulever d'une hauteur h un poids $\frac{P \times V}{v}$, P étant le poids d'un seau.

Le travail correspondant est

$$(1) \qquad W = \frac{P \times V}{v} \times h.$$

Si l'on exprime P en newtons, V et v en litres, h en mètres, le travail sera exprimé en joules.

Application numérique :

$P = 98{,}1$ N; $V = 1$ hl, ou 100 l; $v = 10$ l; $h = 10$ m.

$$W = \frac{98{,}1 \times 100}{10} \times 10, \qquad \mathbf{W = 9\,810\ J.}$$

3° Pour tirer un seau d'eau il faut dépenser un travail

$$W = P \times h.$$

Ce travail est aussi égal au travail de la force $\vec{F}$ dont le point d'application M se déplace d'une longueur x.

La force $\vec{F}$ étant continuellement tangente à la circonférence décrite par M, le travail de $\vec{F}$ est

$$W = F \times x.$$

L'espace x parcouru par l'extrémité M de la manivelle est

$$x = \frac{P \times h}{F}.$$

Or

$$\frac{P}{F} = \frac{R}{r},$$

donc

$$x = \frac{R}{r} \times h.$$

Ce déplacement x correspond à un nombre n de tours du treuil tel que

$$n \times 2\pi R = x = \frac{R}{r} h,$$

ou

$$n = \frac{h}{2\pi r}.$$

Numériquement :

$$x = \frac{0{,}60}{0{,}15} \times 10 \text{ m}, \qquad \boldsymbol{x = 40 \text{ m}.}$$

$$n = \frac{10}{2\pi \times 0{,}15}, \qquad \boldsymbol{n = 10{,}5 \text{ tours}.}$$

4° Le travail nécessaire pour tirer V′ litres d'eau est donné par la formule (1). Si ce travail est produit dans un temps t secondes, la puissance moyenne mise en jeu sera

$$\mathfrak{P} = \frac{W}{t} = \frac{P \times V'}{v} \times \frac{h}{t}.$$

Si l'on exprime P en newtons, V′ et v en litres, h en mètres et t en secondes, $\mathfrak{P}$ sera exprimé en watts.

Application numérique :

$P = 98{,}1$ N; $V' = 10$ hl, ou 1 000 l; $v = 10$ l; $h = 10$ m;

$t = 1$ heure, ou 3 600 s.

$$\mathfrak{P} = \frac{98{,}1 \times 1\,000}{10} \times \frac{10}{3\,600}, \qquad \boldsymbol{\mathfrak{P} = 27{,}2 \text{ W}.}$$

25. — Puissance développée par un cycliste.

Un cycliste pesant avec sa machine 900 N se déplace sur une route horizontale à la vitesse de 24 km à l'heure. La force de frottement a pour valeur, dans ces conditions, 15 N.

On demande :

1° le travail effectué par le cycliste par kilomètre de route;

2° la puissance développée par le cycliste dans ces conditions;

3° la puissance qu'il doit développer si, en conservant la même vitesse, il gravit une côte dont la pente est $\frac{2}{100}$.

(Bacc. tech., Strasbourg.)

1° Travail effectué par le cycliste. — Lorsque le cycliste est en mouvement sur la route horizontale, l'ensemble du cycliste et de sa machine est soumis à l'action de trois forces, que l'on peut supposer concou-

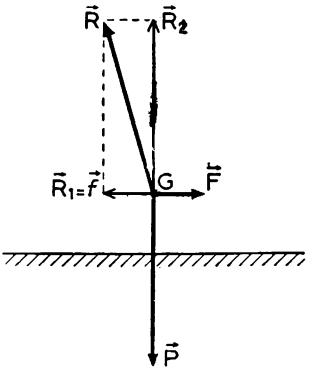


FIG. 1.

rantes et appliquées au centre de gravité de cet ensemble (*fig.* 1) :

— son poids $\vec{P}$, dirigé verticalement;

— la réaction $\vec{R}$ de la route (force de liaison), qui n'est pas perpendiculaire à la route, puisque les frottements ne sont pas négligeables;

— la force de traction $\vec{F}$ exercée par le cycliste.

Si le cycliste se déplace d'un mouvement uniforme, la somme géométrique de ces trois forces est nulle (principe de l'inertie) :

$$(1) \qquad \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = 0.$$

Nous pouvons remplacer la réaction $\vec{R}$ par ses deux composantes, $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$, dirigées la première parallèlement à la route, la seconde perpendiculairement à celle-ci. La composante $\vec{R_1}$ est la force de frottement donnée $\vec{f}$. La relation (1) se traduit par les égalités

$$P = R_2$$

et

$$F = R_1 = f$$

Le travail effectué par le cycliste après un parcours $l = 1$ km est égal en valeur absolue au travail effectué par la force f. (Le travail de $\vec{F}$ est moteur, celui de $\vec{f}$ est résistant.) La force et le déplacement ayant même direction, ce travail a pour expression

$$W = F \times l = f \times l.$$

Application numérique :

$$f = 15 \text{ N}; \qquad l = 1 \text{ km}, \quad \text{ou} \quad 1\,000 \text{ m}.$$

$$W = 15 \times 1\,000, \qquad \mathbf{W = 15\,000\ J.}$$

2° Puissance développée par le cycliste. — La puissance développée par le cycliste est, par définition, le quotient du travail W qu'il effectue par le temps t qu'il met à l'effectuer :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t}.$$

C'est donc le travail qu'il effectue dans l'unité de temps. Si la vitesse du cycliste est v, pour parcourir la distance l il lui faut un temps

$$t = \frac{l}{v}.$$

Par suite, la puissance $\mathcal{P}$ qu'il développe pour franchir la distance l à la vitesse v est

$$\mathcal{P} = \frac{W \times v}{l}.$$

En remplaçant W par sa valeur $f \times l$, on obtient une nouvelle expression de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = f \times v.$$

C'est bien le travail effectué par le cycliste dans l'unité de temps puisque la vitesse est le chemin parcouru dans l'unité de temps.

Application numérique :

$f = 15$ N; $v = 24$ km/h, ou $\frac{24 \times 1\,000}{3\,600} = \frac{20}{3}$ m/s.

$$\mathcal{P} = 15 \times \frac{20}{3}, \qquad \mathcal{P} = \mathbf{100\ W}.$$

3° Puissance développée par le cycliste lorsqu'il gravit la côte. — Lorsque le cycliste gravit la côte, l'ensemble cycliste-machine est soumis à l'action de trois forces concourantes, que l'on suppose appliquées au centre de gravité, G, de cet ensemble (*fig.* 2) :

— son poids $\vec{P}$, dirigé verticalement;

— la réaction $\vec{R}$ de la route, qui n'est pas perpendiculaire à la route, car les frottements ne sont pas négligeables;

— la force de traction $\vec{F'}$ exercée par le cycliste.

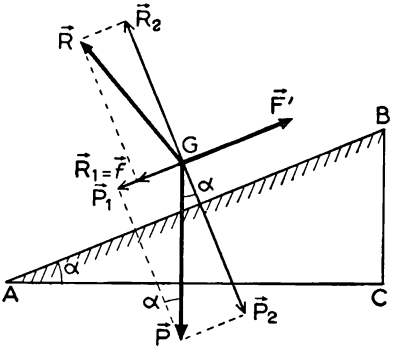


FIG. 2.

Le cycliste se déplaçant d'un mouvement uniforme, nous avons entre ces forces la relation vectorielle

$$(2)\quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{F'} = 0.$$

Nous pouvons remplacer la réaction $\vec{R}$ par ses deux composantes, $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$, dirigées la première parallèlement à la route, la seconde perpendiculairement à cette dernière. La composante R_1 est la force de frottement donnée $\vec{f}$.

De même, le poids $\vec{P}$ peut être remplacé par ses deux composantes, $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$, dirigées la première parallèlement à la route, la seconde perpendiculairement à celle-ci.

La relation (2) se traduit par les égalités

$$R_2 = P_2$$

et

$$F' = R_1 + P_1.$$

Si nous remarquons que $P_1 = P \sin \alpha$, l'expression de F′ devient

$$F' = f + P \sin\alpha.$$

Puisque le cycliste conserve la même vitesse v que sur la route horizontale, il devra développer une puissance

$$\mathcal{P}' = F' \times v = (f + P\sin\alpha)\, v.$$

Application numérique :

$$f = 15 \text{ N}, \qquad P = 900 \text{ N}.$$

On dit que la pente d'une côte est $\frac{h}{100}$ lorsqu'on s'est élevé d'une hauteur verticale de h mètres après avoir parcouru une distance de 100 mètres.

La pente de la côte est donc définie par le rapport $\frac{BC}{AB}$, c'est-à-dire par $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{2}{100}.$$

$$v = 24 \text{ km/h}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{20}{3} \text{ m/s}.$$

$$\mathcal{P} = \left(15 + 900 \times \frac{2}{100}\right)\frac{20}{3},$$

$$\mathcal{P}' = (15 + 18)\frac{20}{3}, \qquad \mathcal{P}' = 220 \text{ W}.$$

26. — Puissance développée par le moteur d'un train à crémaillère.

On veut installer un train à crémaillère sur une pente dont la longueur est 5 km. La distance verticale des points extrêmes est 1 500 m. La masse de chaque wagon, voyageurs compris, est 5 tonnes. On demande :

1° la force que le moteur devra déployer pour entraîner un wagon le long de la pente;

2° le travail nécessaire pour l'ascension d'un seul wagon. Montrer que, si le wagon avait été soulevé par un câble vertical de téléphérique, le travail eût été le même.

3° Le train monte la pente à une vitesse moyenne de 12 km à l'heure. Quelle est, en kW, la puissance du moteur susceptible de faire monter deux wagons semblables?

4° L'énergie utilisée est celle d'une chute d'eau de 10 m de hauteur. Les pertes d'énergie étant évaluées à 25 %, quelle est la quantité d'eau qui doit être captée par heure pour faire marcher le moteur qui entraîne les deux wagons?

Le poids d'une masse de 1 kg est 9,81 N.

(Bacc., Lille.)

1° Le wagon est soumis à l'action de trois forces, que nous supposons concourantes et appliquées en son centre de gravité, G (*fig.* 1) :

— son poids, $\vec{P}$, dirigé verticalement,

— la réaction de la voie, $\vec{R}$, normale à celle-ci (frottements négligeables),

— la force de traction $\vec{F}$ du moteur.

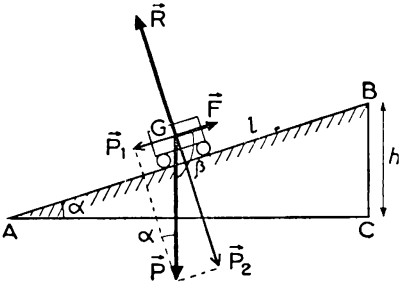


FIG. 1.

Si le wagon est en équilibre sur la voie, nous avons entre ces forces la relation vectorielle

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = 0.$$

Remplaçons le poids $\vec{P}$ par ses deux composantes $P_1 = P \sin\alpha$, dirigée parallèlement à la voie, et $P_2 = P \cos\alpha$ dirigée perpendiculairement à celle-ci. La condition d'équilibre précédente se traduit par les égalités

$$R = P_2 \quad \text{et} \quad F = P_1 = P \sin\alpha.$$

Dans le triangle ABC, nous avons

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{h}{l}.$$

La force de traction est donnée par l'expression

$$F = P \times \frac{h}{l}. \tag{1}$$

Pour entraîner le wagon le long de la pente, le moteur devra exercer une force de traction légèrement supérieure à F.

Application numérique :

$$P = 5\,000 \times 9{,}81 \text{ N},$$

$$h = 1\,500 \text{ m}, \qquad l = 5 \text{ km, ou } 5\,000 \text{ m}.$$

$$F = 5\,000 \times 9{,}81 \times \frac{1\,500}{5\,000} = 14\,715 \text{ N}, \qquad \mathbf{F = 14\,700 \text{ N}}.$$

2° La force $\vec{F}$ et le déplacement l ont même direction. Le travail nécessaire pour l'ascension d'un seul wagon est donné par l'expression

$$W = F \times l.$$

Application numérique :

$$F = 14\,715 \text{ N}; \qquad l = 5 \text{ km, ou } 5\,000 \text{ m.}$$

$$W = 14\,715 \times 5\,000, \qquad \mathbf{W = 73\,600\,000\ J.}$$

Évaluons le travail des trois forces appliquées au wagon pendant le déplacement.

Nous savons que l'expression générale du travail d'une force $\vec{F}$ pendant le déplacement l de son point d'application, dans une direction faisant un angle θ avec la force, est

$$W = F \times l \times \cos\theta.$$

Le travail de $\vec{R}$ est nul : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$.

Le travail de $\vec{F}$ est donné par l'expression (1) : $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$,

$$W = F \times l = P \times \frac{h}{l} \times l = P \times h.$$

Enfin le travail du poids $\vec{P}$ qui fait un angle β avec la direction du déplacement, est donné par l'expression

$$W' = P \times l \times \cos\beta = P \times l \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -P \times l \times \sin\alpha,$$

$$W' = -P \times l \times \frac{h}{l} = -P \times h.$$

Nous voyons que le travail de $\vec{F}$ (travail moteur) est égal et de signe contraire au travail de $\vec{P}$ (travail résistant). On dit qu'il y a conservation du travail.

Il est facile de vérifier que la pesanteur (par suite la force $\vec{F}$) accomplirait le même travail si l'on déplaçait le wagon de A en C sur une voie horizontale, puis de C en B à l'aide d'un câble vertical de téléphérique exerçant une traction $\vec{\mathcal{C}}$ égale et de sens opposé à $\vec{P}$ (*fig.* 2).

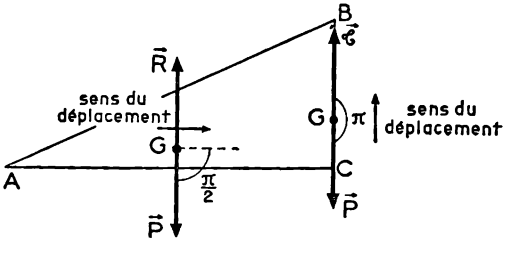


FIG. 2.

Pendant le déplacement de A en C, le travail de la pesanteur est nul $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Pendant le déplacement de C en B ($\theta = \pi$), le travail de la pesanteur est

$$W' = P \times h \times \cos\pi = -P \times h.$$

Par suite $$W = -W' = P \times h.$$

La force $\vec{F}$ nulle le long de AC est égale à P le long de CB. Le travail de $\vec{F}$ pour le chemin ACB est donc

$$W = P \times h.$$

Ce résultat serait encore vrai si le déplacement de A en B s'effectuait en suivant un chemin quelconque.

3° La puissance du moteur est par définition le quotient du travail W qu'il effectue par le temps t qu'il met à l'effectuer :

$$\mathfrak{P} = \frac{W}{t}.$$

Pour déplacer deux wagons de la longueur l le long de la pente, il faut exercer une force de traction 2 F, donc dépenser un travail

$$W = 2 \times F \times l.$$

La puissance développée par le moteur est

$$\mathfrak{P} = \frac{W}{t} = 2F \times \frac{l}{t}.$$

Or le rapport $\frac{l}{t}$ n'est autre que la vitesse moyenne v du déplacement. La puissance $\mathfrak{P}$ est donc $\mathfrak{P} = 2F \times v$.

Application numérique :

$$F = 14\,715 \text{ N}; \qquad v = 12 \text{ km/h}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{12\,000}{3\,600} = \frac{10}{3} \text{ m/s}.$$

$$\mathfrak{P} = 2 \times 14\,715 \times \frac{10}{3} = 98\,100 \text{ W}.$$

$$\mathfrak{P} = \mathbf{98{,}1 \text{ kW}}.$$

4° Soit x la quantité d'eau, exprimée en litres par heure, qui subit la chute de H mètres. Le poids de cette eau est $x \times 9{,}81$ N. Le travail produit par la pesanteur pendant cette chute est

$$W = x \times 9{,}81 \times H \text{ joules}.$$

Les pertes d'énergie étant 25 %, le travail utilisé par le moteur est

$$W_u = \frac{75}{100} \times x \times 9{,}81 \times H \text{ joules}.$$

Ce travail est égal à celui que produit le moteur pendant 1 heure. Si $\mathfrak{P}$ est la puissance du moteur, évaluée en watts, nous pouvons écrire

$$\frac{75}{100} \times x \times 9{,}81 \times H = \mathfrak{P} \times 3\,600,$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{\mathfrak{P} \times 3\,600 \times 100}{75 \times 9{,}81 \times H} \text{ litres par heure}.$$

C'est la quantité d'eau qui doit être captée par heure pour faire marcher le moteur.

Application numérique :

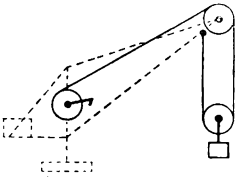
$$\mathcal{P} = 98\,100 \text{ W}, \quad H = 10 \text{ m}.$$

$$x = \frac{98\,100 \times 3\,600 \times 100}{75 \times 9{,}81 \times 10},$$

$$x = \mathbf{4{,}8 \text{ millions de litres par heure.}}$$

27. — Puissance développée pour soulever une charge à l'aide d'une grue.

1° Une grue comporte essentiellement un treuil, une poulie fixe et une poulie mobile. La manivelle du treuil a 50 cm de longueur, le tambour a un diamètre de 20 cm.



Avec quelle force faut-il agir sur la manivelle pour soulever une charge de 2 000 N ?

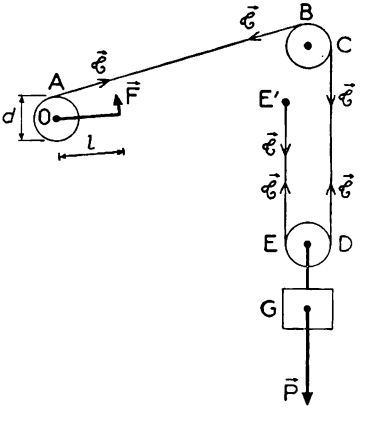
2° Un ouvrier soulève la charge précédente d'une hauteur de 9 mètres en un temps $t = 45$ secondes. Calculer :

a) la puissance qu'il a développée pour effectuer ce travail;

b) le nombre de tours de manivelle qu'il a donnés.

1° La grue est formée d'un ensemble de trois machines simples : un treuil, une poulie fixe et une poulie mobile.

Représentons sur la figure les forces agissant sur ces différentes parties.



Lorsque nous exerçons une force $\vec{F}$ sur la manivelle, la corde s'enroule autour du tambour du treuil, entraînant le mouvement des deux autres poulies. La corde subit donc une diminution de longueur et, par suite, la poulie mobile s'élève verticalement, entraînant le poids $\vec{P}$.

Pour déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$, nous pouvons appliquer le principe de la conservation du travail.

Supposons que la manivelle fasse un tour complet, les seules forces qui travaillent sont les suivantes :

— la force $\vec{F}$ qui accomplit un travail moteur;

— le poids $\vec{P}$ qui accomplit un travail résistant.

La somme des travaux des forces de tension est nulle, ces forces étant deux à deux égales et opposées.

Le travail accompli par la force $\vec{F}$ est

$$W = F \times 2\pi l.$$

Pendant la rotation, la corde s'est enroulée sur le tambour d'une longueur πd. Cette diminution de longueur se trouve répartie moitié sur la partie CD, moitié sur la partie EE'. Le poids $\vec{P}$ s'est donc déplacé verticalement d'une hauteur

$$h = \frac{\pi d}{2}.$$

La force $\vec{P}$ a ainsi accompli un travail

$$W' = P \times h = P \times \frac{\pi d}{2}.$$

D'après le principe de la conservation du travail, $W = W'$.

$$F \times 2\pi l = P \times \frac{\pi d}{2};$$

d'où nous tirons

$$F = P \times \frac{d}{4l}.$$

Application numérique :

$$P = 2\,000 \text{ N}, \quad d = 20 \text{ cm, ou } 0{,}20 \text{ m},$$
$$l = 50 \text{ cm}, \quad \text{ou} \quad 0{,}50 \text{ m}.$$
$$F = 2\,000 \times \frac{0{,}20}{4 \times 0{,}50},$$
$$\mathbf{F = 200 \text{ N}.}$$

2° *a*) Le travail effectué par l'ouvrier pour monter la charge P d'une hauteur h (travail moteur) est égal au travail effectué par la pesanteur pendant la montée (travail résistant) :

$$W = P \times h.$$

La puissance qu'il a développée est donc

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{P \times h}{t}.$$

Application numérique :

$$P = 2\,000 \text{ N}, \quad h = 9 \text{ m}, \quad t = 45 \text{ s}.$$
$$\mathcal{P} = \frac{2\,000 \times 9}{45}$$
$$\mathbf{\mathcal{P} = 400 \text{ W}.}$$

b) Soit n le nombre de tours cherché.
Le travail effectué par l'ouvrier pour monter la charge est

$$W = F \times 2\pi l \times n.$$

Ce travail est égal à celui de la pesanteur :

$$F \times 2\pi l \times n = P \times h;$$

d'où nous tirons

$$n = \frac{P \times h}{F \times 2\pi l}.$$

Application numérique :

$$P = 2\,000 \text{ N}, \quad h = 9 \text{ m}, \quad F = 200 \text{ N}, \quad l = 0{,}50 \text{ m}.$$

$$n = \frac{2\,000 \times 9}{200 \times 2\pi \times 0{,}50} = 28{,}65 \text{ tours},$$

$$\boldsymbol{n = 28{,}6 \text{ tours.}}$$

CHAPITRE VIII

Notion de pression. Principe général de l'hydrostatique.

28. — Pression exercée sur le sol par un camion.

Un camion chargé a une masse de 20 tonnes. Il prend contact avec le sol de la route par l'intermédiaire de 10 pneus. La bande de roulement de chaque pneu a 20 cm de large; elle est en contact avec le sol sur une longueur de 25 cm; on suppose que la charge est uniformément répartie. Quelle est la pression supportée par le sol de la route?

Le poids d'une masse de 1 kg est 9,81 N.

La bande de roulement de chaque pneu a une largeur l m. Elle est en contact avec le sol sur une longueur L m. La surface de contact des n pneus avec la route a pour aire, en mètres carrés,

$$S = n \times l \times L.$$

Si nous désignons par M la masse du camion, exprimée en kilogrammes, son poids est $P = M \times 9{,}81$ N.

La pression p supportée par le sol est

$$p = \frac{P}{S}.$$

P étant exprimée en newtons et S en mètres carrés, p est exprimée en pascals :

$$p = \frac{M \times 9{,}81}{n \times l \times L}.$$

Application numérique :

$$M = 20 \text{ tonnes, ou } 20\,000 \text{ kg}; \quad n = 10;$$

$$l = 20 \text{ cm, ou } 0{,}20 \text{ m}; \quad L = 25 \text{ cm, ou } 0{,}25 \text{ m};$$

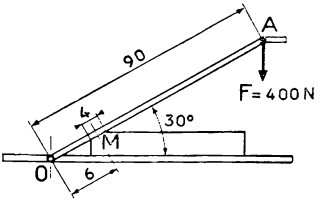
$$p = \frac{20\,000 \times 9{,}81,}{10 \times 0{,}20 \times 0{,}25},$$

$$p = 40\,000 \times 9{,}81 = 392\,400 \text{ pascals},$$

$$\mathbf{p = 392\,000 \text{ pascals.}}$$

29. — Pression exercée sur un bloc de papier par la lame d'un massicot.

Le tranchant d'un massicot de relieur a une épaisseur de 0,05 mm. Il est solidaire d'une barre rigide, qui peut tourner autour d'un axe horizontal O.

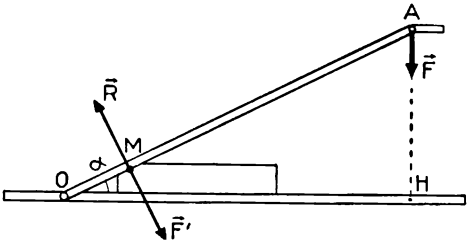


On veut rogner un bloc de papier avec cet appareil. Pour cela, on exerce sur la barre, en un point A situé à 90 cm de l'axe O, une force verticale F dirigée vers le bas, égale à 400 N. Le contact entre le tranchant et le papier se fait sur une longueur de 4 cm, dont le milieu M est situé à 6 cm de l'axe O; la lame fait un angle de 30° avec le plan horizontal. Calculer la pression exercée par l'arête tranchante sur le papier à rogner.

Les forces exercées par la lame sur le papier ont une résultante, $\vec{F'}$, que l'on peut supposer normale à la barre et appliquée au centre de symétrie, M, de la surface de contact rectangulaire « lame-papier ».

Si nous désignons par S l'aire de cette surface, la pression exercée par l'arête tranchante sur le papier à rogner est

$$p = \frac{F'}{S}.$$



Calcul de F'. — Le levier est un solide ayant un axe fixe. Lorsqu'il est en équilibre dans la position indiquée sur la figure, la somme des moments par rapport à l'axe O des forces qui lui sont appliquées est nulle (théorème des moments).

Ces forces sont :

— la force verticale, $\vec{F}$, appliquée au point A;

— une force $\vec{R}$ égale et opposée à $\vec{F'}$ (réaction du bloc de papier).

La condition d'équilibre s'écrit

$$F \times OH - R \times OM = 0,$$

ou

$$F \times OA \times \cos\alpha = R \times OM;$$

d'où nous tirons

$$F' = R = F \times \frac{OA}{OM} \times \cos\alpha.$$

Calcul de S. — Le contact entre le tranchant et le papier se fait sur une longueur d. La surface de contact lame-papier est le produit de la longueur d par l'épaisseur e du tranchant :

$$S = d \times e.$$

p sera exprimée en pascals si F′ est exprimée en newtons et S en mètres carrés.

Application numérique :

$$F = 400 \text{ N}; \quad OA = 90 \text{ cm}, \text{ ou } 0{,}90 \text{ m};$$

$$OM = 6 \text{ cm}, \text{ ou } 0{,}06 \text{ m}; \quad \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$d = 4 \text{ cm}, \text{ ou } 0{,}04 \text{ m}; \quad e = 0{,}05 \text{ mm}, \text{ ou } 0{,}000\,05 \text{ m}.$$

$$F' = 400 \times \frac{0{,}90}{0{,}06} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\,000\sqrt{3} \text{ N},$$

$$S = 0{,}04 \times 0{,}000\,05 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2,$$

$$p = \frac{3\,000\sqrt{3}}{2 \times 10^{-6}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 10^9 = 2\,598 \times 10^6 \text{ pascals},$$

$$p = 2\,600 \times 10^6 \text{ pascals}.$$

Cette pression est considérable. Comparée à la pression atmosphérique, 10^5 pascals, elle est 26 000 fois plus forte. Le bloc de papier est donc rogné très facilement.

30. — Poids d'un cylindre de plomb obturant l'orifice d'un jet d'eau.

L'orifice d'un jet d'eau est à 16 m au-dessous de la surface libre du réservoir d'alimentation; il a 1 centimètre de diamètre intérieur. Quel est le poids minimal de l'obturateur qui, posé sur cet orifice, empêche l'eau de jaillir? L'obturateur est en plomb; c'est un cylindre de 2 centimètres de diamètre. Quelle est sa hauteur minimale. Poids volumique de l'eau : 9,8 N/dm³.

Poids volumique du plomb : 111 N/dm³.

Nous supposerons que la pression atmosphérique a la même valeur, p, au voisinage de l'orifice et au niveau de la surface libre du liquide contenu dans le réservoir d'alimentation.

Calculons la pression, p', exercée par l'eau sur la portion AB de l'obturateur.

Si nous considérons les points M et N du liquide en équilibre situés le premier, M, au contact de l'obturateur, le second, N, au niveau de la surface libre du liquide (non figurée), la différence des pressions entre ces deux points est donnée par le principe général de l'hydrostatique :

$$p' - p = \varpi \times h,$$

ϖ désignant le poids volumique de l'eau et h la différence de niveau des deux points.

Nous tirons de cette relation

$$p' = p + \varpi \times h.$$

L'eau ne jaillira pas par l'orifice si la résultante des forces verticales agissant de haut en bas sur le cylindre est supérieure ou égale à la résultante des forces verticales agissant de bas en haut. Si nous désignons par P le poids du cylindre, par S l'aire de sa section circulaire et par s l'aire de l'orifice AB, la condition précédente s'exprime par la relation

$$P + p \times S \geqslant (p + \varpi \times h)s + p(S - s),$$

qui se réduit à

$$P \geqslant \varpi \times h \times s.$$

Le poids minimal de l'obturateur est donc

$$P = \varpi \times h \times s.$$

Application numérique :

Le poids volumique ϖ étant donné en N/dm³ le produit $h \times s$ devra être calculé en dm³.

$$\varpi = 9{,}8 \text{ N/dm}^3; \qquad h = 16 \text{ m}, \quad \text{ou} \quad 160 \text{ dm};$$

$$s = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi}{400} \text{ dm}^2.$$

$$P = 9{,}8 \times 160 \times \frac{\pi}{400} = 3{,}92 \times \pi, \qquad \mathbf{P = 12{,}3 \text{ N}.}$$

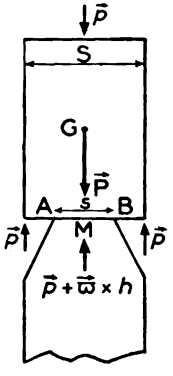
Soient d le diamètre du cylindre et x sa hauteur. Son volume est

$$v = \pi \frac{d^2}{4} \times x$$

et son poids,

$$P = \varpi' \times v = \varpi' \times \pi \frac{d^2}{4} \times x,$$

ϖ' désignant le poids volumique du plomb.



Nous tirons de cette relation

$$x = \frac{4P}{\varpi' \times \pi d^2}.$$

Application numérique :

P étant exprimé en N, ϖ en N/dm³, d en dm, x sera obtenu en dm.

$$P = 3{,}92 \times \pi \text{N}, \qquad \varpi' = 111 \text{ N/dm}^3,$$

$$d = 2 \text{ cm}, \qquad \text{ou} \qquad 0{,}2 \text{ dm}.$$

$$x = \frac{4 \times 3{,}92 \times \pi}{111 \times \pi \times 0{,}2^2} = \frac{3{,}92}{1{,}11} \text{ dm}.$$

$$x = 3{,}53 \text{ dm}, \qquad \mathbf{x = 35{,}3 \text{ cm}.}$$

31. — Vases communicants renfermant des liquides différents.

1° Un tube en U contient du tétrachlorure de carbone, de densité 1,62, jusqu'à une distance de 30 cm des extrémités supérieures du tube. Quelle hauteur d'eau doit-on verser dans l'une des branches pour la remplir entièrement?

Quelle hauteur minimale doit avoir initialement le tétrachlorure de carbone pour que l'expérience soit simple et facile à réaliser?

2° Cette hauteur n'était que 8 cm. Que se passe-t-il quand on tente de remplir d'eau l'une des branches?

Quel est l'état d'équilibre final qui se réalise dans ce cas, état défini par les hauteurs d'eau dans chacune des branches du tube en U, l'une étant remplie jusqu'au bord supérieur?

1° La figure 1 montre le niveau du tétrachlorure de carbone avant l'addition d'eau dans la branche A et après cette addition. Dans le nouvel équilibre, ce niveau a baissé d'une hauteur x dans la branche A et s'est élevé de la même hauteur dans la branche A'.

La hauteur de la colonne d'eau, au-dessus du niveau de la surface de séparation des deux liquides est

$$\mathrm{HM} = x + h.$$

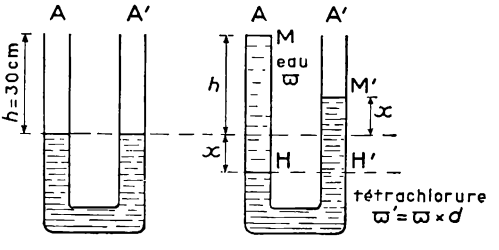


FIG. 1.

Celle de la colonne de tétrachlorure de carbone est

$$\mathrm{H'M'} = 2\,x.$$

Appliquons le principe général de l'hydrostatique.

Branche A : colonne d'eau de poids volumique ϖ,

$$(1) \qquad p_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{M}} = \varpi \times \mathrm{HM} = \varpi\,(x + h).$$

Branche A' : colonne de tétrachlorure de carbone de poids volumique $\varpi' = \varpi \times d$,

$$(2) \qquad p_{\mathrm{H'}} - p_{\mathrm{M'}} = \varpi' \times \mathrm{H'M'} = \varpi\, d \times 2\,x.$$

Dans un liquide en équilibre, la pression est la même en tous les points d'un même plan horizontal : $p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{H'}}$.

D'autre part

$$p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{M'}} \text{ (pression atmosphérique).}$$

Les premiers membres des égalités (1) et (2) sont identiques. Il en résulte que

$$\varpi (h + x) = \varpi \times d \times 2x.$$

Nous en tirons

$$x = \frac{h}{2d - 1}.$$

Application numérique :

$h = 30$ cm; $d = 1{,}62.$

$$x = \frac{30}{2 \times 1{,}62 - 1} = \frac{30}{2{,}24} = 13{,}39 \text{ cm},$$

$$x = \mathbf{13{,}4\ cm.}$$

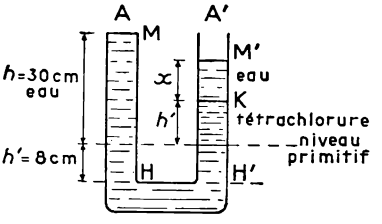


FIG. 2.

Pour que l'expérience soit possible, il faut que le tétrachlorure de carbone ait initialement la hauteur $x = 13{,}39$ cm dans le tube.

2° Supposons que la hauteur initiale du tétrachlorure soit

$$h' < 13{,}39 \text{ cm}.$$

Quand nous versons de l'eau dans la branche A le niveau du tétrachlorure commence par baisser d'une hauteur h'. Si nous continuons à verser de l'eau, une partie de cette eau passe dans la branche A′ et nous aurons finalement un équilibre représenté par la figure 2.

La hauteur de la colonne d'eau au-dessus de la surface de séparation est

$$\mathrm{HM} = h' + h.$$

Dans la branche A′ nous avons une colonne de tétrachlorure de carbone de hauteur $\mathrm{H'K} = 2h'$ surmontée d'une colonne d'eau de hauteur

$$\mathrm{KM'} = x.$$

Appliquons le principe général de l'hydrostatique.

Branche A : colonne d'eau,

$$(3) \qquad p_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{M}} = \varpi \times \mathrm{HM} = \varpi (h' + h).$$

Branche A′ : colonne de deux liquides superposés,

$$(4) \quad p_{\mathrm{H'}} - p_{\mathrm{M'}} = \varpi' \times \mathrm{H'K} + \varpi \times \mathrm{KM'} = \varpi d \times 2h' + \varpi \times x.$$

Nous en tirons comme précédemment

$$\varpi (h' + h) = \varpi \times d \times 2h' + \varpi x,$$

d'où

$$x = (h' + h) - 2d \times h'.$$

Application numérique :

$$h' = 8 \text{ cm}, \qquad h = 30 \text{ cm}, \qquad d = 1{,}62.$$

$$x = 8 + 30 - 2 \times 1{,}62 \times 8 = 38 - 25{,}92,$$

$$\mathbf{x = 12{,}08\ cm.}$$

32. — Étude d'une presse hydraulique.

a) Le grand piston d'une presse hydraulique a 20 cm de rayon, le petit piston 1 cm de rayon. La table horizontale liée au grand piston a 50 cm de rayon. Un liquide exerce sur cette table une pression de 2×10^5 pascals. Quelle force faut-il appliquer sur le petit piston pour établir l'équilibre? (On néglige le poids de la table et des pistons.)

On exerce une force un peu inférieure à celle qu'on vient de calculer. Le grand piston s'abaisse de 1 mm. De quelle longueur s'élève le petit piston? Vérifier que, au cours de ce déplacement, le principe de la conservation du travail est satisfait, à condition de négliger les frottements.

b) Les mouvements du petit piston sont commandés au moyen d'un levier qu'on manœuvre à la main. On exerce sur la poignée du levier qui commande le petit piston une force de 400 N. On constate que, dans ces conditions, on soulève un poids de 600 000 N posé sur la table de la machine.

Quel est le rapport des bras de levier?

a) Désignons par s et S les aires des pistons de la machine et par S' l'aire de la table (*fig.* 1).

Le liquide exerce sur la table une pression p' et, par suite, une force pressante

$$F = p' \times S'.$$

Cette force est intégralement transmise au grand piston (propriété des solides). Celui-ci exerce sur le liquide contenu dans l'appareil une pression

$$p = \frac{F}{S}.$$

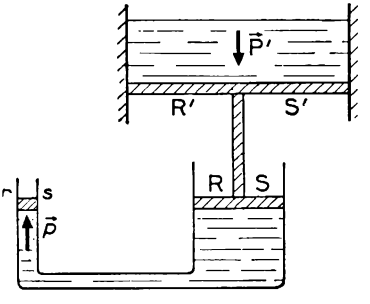


FIG. 1.

Cette pression est transmise par le liquide au petit piston (principe de Pascal). Celui-ci est donc soumis, de la part du liquide, à une force pressante

$$f = p \times s = F \times \frac{s}{S} = p' \times S' \times \frac{s}{S},$$

ou, en désignant par r, R et R' les rayons des pistons et de la table

$$f = p' \times \pi R'^2 \times \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Application numérique :

$p' = 2 \times 10^5$ pascals; $R' = 50$ cm, ou 0,50 m; $R = 20$ cm, ou 0,20 m; $r = 1$ cm, ou 0,01 m.

$$f = 2 \times 10^5 \times \pi \times 0{,}5^2 \times \left(\frac{0{,}01}{0{,}20}\right)^2 = 125\,\pi,$$

$$\mathbf{f = 392{,}7\ N.}$$

Vérification du principe de la conservation du travail.

Les liquides sont incompressibles : lorsque le grand piston se déplace d'une longueur h, le petit piston se déplace d'une longueur H telle que

$$H \times s = h \times S,$$

d'où

$$H = h \times \frac{S}{s} = h \times \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Si nous négligeons les frottements, le travail accompli par la force F (travail moteur) est

$$W = F \times h = p' \times \pi R'^2 \times h.$$

Le travail accompli par la force f (travail résistant) est

$$W' = f \times H.$$

Application numérique :

$h = 1$ mm, ou 0,001 m; $\frac{R}{r} = 20$; $p' = 2 \times 10^5$ pascals;

$R' = 50$ cm, ou 0,50 m; $f = 125 \times \pi$N.

$H = 0{,}001 \times 20^2 = 0{,}4$ m,

$\mathbf{H = 40\ cm.}$

$W = 2 \times 10^5 \times \pi \times 0{,}5^2 \times 0{,}001 = 50\,\pi$ joules,

$W' = 125 \times \pi \times 0{,}4 = 50\,\pi$ joules,

d'où $\mathbf{W = W' = 50\,\pi = 157\ joules.}$

Le principe de la conservation du travail est vérifié.

b) Soit P le poids soulevé par le grand piston (*fig.* 2). Ce poids exerce sur le liquide une pression

$$p = \frac{P}{S}.$$

Cette pression est transmise au petit piston. Celui-ci est soumis, de la part du liquide, à une force pressante

$$f = p \times s = P \times \frac{s}{S} = P \times \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Cette force est appliquée au point A du levier. Elle est équilibrée par la force connue f' appliquée à l'extrémité B. Le levier est en équilibre

lorsque la somme des moments par rapport à l'axe fixe O des forces qui lui sont appliquées est nulle (théorème des moments) :

$$f' \times OB - f \times OA = 0.$$

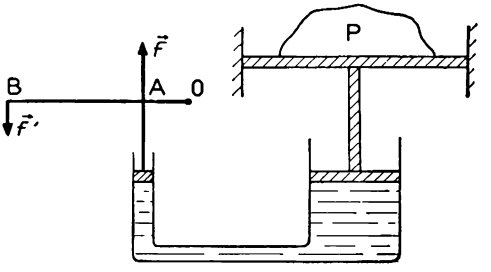


FIG. 2.

Nous en tirons

$$\frac{OB}{OA} = \frac{f}{f'} = \frac{P}{f'} \times \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Application numérique :

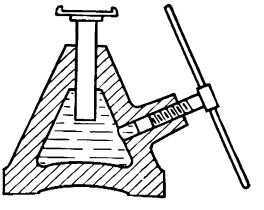
$$P = 600\,000 \text{ N}; \quad f' = 400 \text{ N}; \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{20}.$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{600\,000}{400} \times \frac{1}{400},$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{15}{4}.$$

33. — Étude d'un vérin hydraulique.

1° Le corps d'un vérin hydraulique est empli d'huile fluide. Le piston plongeur a 6 cm de diamètre. On commande son mouvement au moyen d'un deuxième piston, qui a 2 cm de diamètre. Ce piston est poussé dans le cylindre qui le contient et qui guide son mouvement par une vis de pas 2 mm dont l'écrou est invariablement lié au bâti du vérin.



On fait tourner le corps de la vis au moyen d'une barre métallique rigide, de longueur 60 cm, dont le milieu est fixé sur l'axe de la vis et qui est perpendiculaire à l'axe de celle-ci.

Quelle force minimale, supposée perpendiculaire à la barre et à l'axe de la vis, faut-il appliquer à chacune des extrémités de la barre pour soulever une charge de 6 000 N?

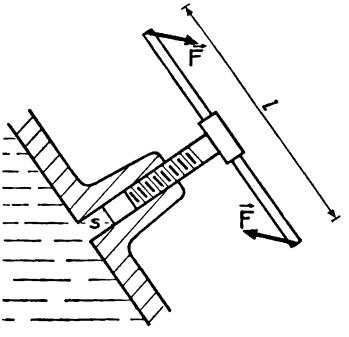
Il sera commode de raisonner sur un tour complet de la vis en appliquant le principe de la conservation du travail.

2° Au moyen de six vérins hydrauliques identiques, disposés pour supporter des charges égales, on veut soulever le tablier d'un pont métallique pesant 900 000 N.

Quelle pression minimale doivent réaliser les pompes d'alimentation des corps de ces vérins, sachant que les pistons plongeurs ont 16 cm de diamètre?

Quelle puissance développe chacun des vérins, sachant que le tablier du pont s'élève de 15 cm par heure?

1° Lorsque nous appliquons, à chaque extrémité de la barre de longueur l, une force F perpendiculaire à la barre et à l'axe de la vis, la barre est soumise à un couple de moment



$$\mathcal{M} = F \times l.$$

Supposons que la vis fasse un tour complet sous l'action de ce couple. Celui-ci effectue un travail moteur W tel que

$$W = 2\pi \times \mathcal{M} = 2\pi \times F \times l.$$

Le petit piston se déplace d'une longueur a égale au pas de la vis. Si nous désignons par s l'aire du piston, le volume du liquide refoulé à l'intérieur de la cavité est égal à $a \times s$.

Le liquide étant incompressible, le piston plongeur, d'aire S, se déplace d'une hauteur h telle que

$$h \times S = a \times s.$$

Nous en tirons

$$h = a \times \frac{s}{S} = a \times \left(\frac{d}{D}\right)^2,$$

en désignant par d et D les diamètres des deux pistons. La charge P supportée par le piston plongeur s'élève de la hauteur h. Le travail résistant accompli pendant ce déplacement est

$$W' = P \times h = P \times a \times \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

D'après le principe de la conservation du travail, $W = W'$;

d'où

$$2\pi \times F \times l = P \times a \times \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Nous en tirons

$$F = \frac{P \times a}{2\pi \times l} \times \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Application numérique :

$P = 6\,000$ N; $a = 2$ mm, ou 0,002 m; $l = 60$ cm, ou 0,60 m; $d = 2$ cm, ou 0,02 m; $D = 6$ cm, ou 0,06 m

$$F = \frac{6\,000 \times 0{,}002}{2\pi \times 0{,}60} \times \left(\frac{0{,}02}{0{,}06}\right)^2 = \frac{10}{9\pi},$$

$$\mathbf{F = 0{,}354\ N.}$$

2° Le pont métallique a un poids égal à Q. Chaque vérin doit supporter une charge $P' = \frac{Q}{6}$. La force pressante du liquide sur la face inférieure du piston plongeur est égale à P'. Si nous désignons par D' le diamètre de ce piston et par S' son aire, la pression p qui doit être exercée sur sa face inférieure est

$$p = \frac{P'}{S'} = \frac{P'}{\pi \frac{D'^2}{4}} = \frac{4P'}{\pi D'^2} = \frac{4Q}{6\pi D'^2},$$

$$p = \frac{2Q}{3\pi D'^2}.$$

Le tablier du pont s'élève d'une hauteur h' par heure. La puissance développée par chacun des vérins est

$$\mathfrak{P} = P' \times \frac{h'}{3\,600} = \frac{Q \times h'}{21\,600}.$$

Application numérique :

$Q = 900\,000$ N; $D' = 16$ cm, ou 0,16 m; $h' = 15$ cm, ou 0,15 m.

$$p = \frac{2 \times 900\,000}{3\pi \times (0{,}16)^2} = \frac{3 \times 10^9}{128\pi},$$

$$\mathbf{p = 746 \times 10^4\ pascals.}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{900\,000 \times 0{,}15}{21\,600} = \frac{1\,350}{216},$$

$$\mathfrak{P} = \mathbf{6{,}25\ W.}$$

CHAPITRE IX

Théorème d'Archimède.

34. — Poussée d'Archimède sur un solide immergé dans l'eau

1° On suspend un caillou, de densité 2,7, à un dynamomètre. Le poids indiqué par le dynamomètre est 18 N. On immerge le caillou dans un vase contenant de l'eau, placé sur l'un des plateaux d'une balance Roberval, un équilibre de la balance étant réalisé.

Quelle est, alors, l'indication du dynamomètre? Quel poids faut-il ajouter à la tare pour rétablir l'équilibre de la balance Roberval?

2° On supprime la liaison entre le caillou et le dynamomètre, le caillou va au fond du vase. Quelle est la valeur des poids marqués qu'il faut ajouter, du côté de la tare pour rétablir le même équilibre de la balance?

On négligera la poussée d'Archimède due à l'air.

1° Lorsque le caillou est suspendu au dynamomètre, il est soumis à l'action de deux forces verticales (*fig.* 1) :

FIG. 1.

— son poids, $\vec{P}$, appliqué en son centre de gravité, G;

— la tension, $\vec{\mathcal{C}}$, du ressort, appliquée en A et mesurée par le dynamomètre.

Le caillou étant en équilibre, ces deux forces sont égales et opposées :

$$\mathcal{C} = P.$$

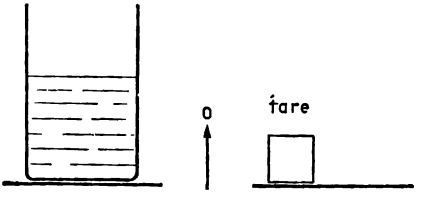


FIG. 2.

Le vase contenant de l'eau est placé sur le plateau de la balance Roberval et l'équilibre est réalisé à l'aide d'une tare placée sur l'autre plateau (*fig.* 2).

Si nous immergeons le solide dans l'eau, nous constatons un double phénomène :

— le dynamomètre marque une tension $\vec{\mathcal{T}}'$ inférieure à $\vec{\mathcal{T}}$;

— l'équilibre de la balance est rompu.

Pour rétablir l'équilibre, il faut placer un poids P' à côté de la tare (*fig.* 3).

Il s'agit de calculer $\mathcal{T}'$ et P'.

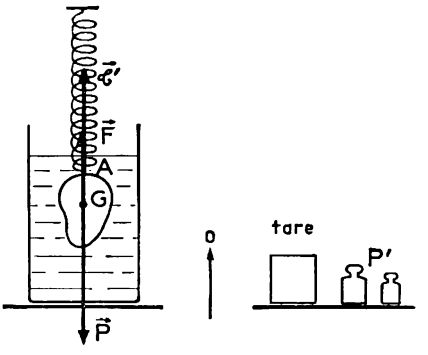


FIG. 3.

Calcul de $\mathcal{T}'$. — Lorsque le caillou est complètement immergé et l'équilibre réalisé, le caillou est soumis à l'action de trois forces verticales :

— son poids, $\vec{P}$, appliqué en G;

— la tension, $\vec{\mathcal{T}}'$, du ressort, appliquée en A;

— la poussée d'Archimède, $\vec{F}$, résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le caillou.

D'après le théorème d'Archimède, cette résultante est une force verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de ce liquide déplacé (centre de poussée).

Si nous supposons que le caillou est un solide homogène, le centre de poussée est confondu avec le centre de gravité.

La condition d'équilibre s'exprime par la relation

$$\mathcal{T}' + F - P = 0,$$

d'où nous tirons

$$\mathcal{T}' = P - F.$$

Si nous désignons par d la densité du solide par rapport à l'eau la poussée d'Archimède est

$$F = \frac{P}{d}.$$

La tension du ressort est alors

$$\mathcal{T}' = P - \frac{P}{d} = P \times \frac{d-1}{d}.$$

Application numérique :

$$P = 18 \text{ N}; \qquad d = 2{,}7.$$

$$\mathcal{C}' = 18 \times \frac{2{,}7 - 1}{2{,}7} = \frac{306}{27}.$$

$$\mathcal{C}' = \mathbf{11{,}33 \text{ N}}.$$

Calcul de P'. — Le poids P' représente la résultante des forces exercées par le solide sur le liquide. D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, cette résultante est une force verticale égale et opposée à la poussée d'Archimède :

$$P' = F = \frac{P}{d}.$$

Numériquement :

$$P' = \frac{18}{2{,}7},$$

$$\mathbf{P' = 6{,}66 \text{ N}}.$$

2° Si nous supprimons la liaison entre le caillou et le dynamomètre, le caillou prend contact avec le vase; l'équilibre est rompu. Pour le rétablir, il faut placer à côté de la tare un poids P'' (*fig.* 4).

En comparant les équilibres représentés par les figures (2) et (4) nous voyons immédiatement que P'' = P.

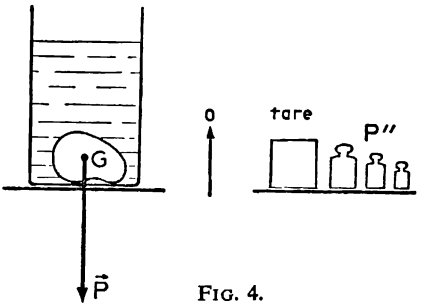


FIG. 4.

Numériquement :

$$\mathbf{P'' = 18 \text{ N}}.$$

35. — Application du principe d'Archimède à la mesure de la masse volumique de l'eau.

Un cube de quartz de 10 cm d'arête est immergé dans l'eau à 0 °C. On mesure la poussée d'Archimède qu'il subit. Elle est égale au poids d'une masse $m = 999{,}840$ g, connue à 1 mg près. La longueur de l'arête est mesurée à 0,2 micron près $\left(1 \text{ micron} = \frac{1}{10\,000} \text{ cm}\right)$.

Calculer la masse volumique de l'eau à 0 °C.

Trouver une limite supérieure de l'erreur commise dans cette mesure. Montrer qu'elle est inférieure à $\frac{1}{100\,000}$.

Avec combien de chiffres significatifs faut-il écrire le résultat de la mesure?

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le cube de quartz complètement immergé dans le liquide. D'après le théorème d'Archimède, cette résultante est une force verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé.

Si nous désignons par m la masse du cube de quartz, par l son arête, par μ_0 la masse volumique de l'eau à 0 °C et par g l'intensité de la pesanteur, nous pouvons écrire

$$m \times g = \mu_0 \times l^3 \times g.$$

Nous en tirons

(1) $$\mu_0 = \frac{m}{l^3}.$$

Numériquement :

$$m = 999{,}840 \text{ g}, \qquad l = 10 \text{ cm}.$$

$$\mu_0 = \frac{999{,}840}{10^3},$$

$$\mu_0 = 0{,}999\,840 \ldots \text{ g/cm}^3.$$

Précision de la mesure. — Pour déterminer une limite supérieure de l'erreur relative commise dans la mesure, appliquons le théorème des erreurs relatives maximales à l'expression (1) :

$$\frac{\Delta\mu_0}{\mu_0} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta l}{l}.$$

Numériquement :

$$\Delta m = 1 \text{ mg}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10^3} \text{ g}, \qquad m = 999{,}840 \text{ g} \approx 10^3 \text{ g}.$$

$$\Delta l = 0{,}2 \text{ micron}, \quad \text{ou} \quad \frac{2}{10^5} \text{ cm}, \qquad l = 10 \text{ cm},$$

$$\mu_0 = 0{,}999\,840 \text{ g/cm}^3 \approx 1 \text{ g/cm}^3.$$

$$\frac{\Delta\mu_0}{\mu_0} = \frac{1}{10^3 \times 10^3} + 3 \times \frac{2}{10^5 \times 10} = \frac{7}{10^6}.$$

Cette erreur est inférieure à $\frac{1}{100\,000}$.

De l'expression précédente nous tirons

$$\Delta\mu_0 = \frac{7}{10^6}\mu_0 \approx \frac{7}{10^6} \times 1 \text{ g/cm}^3,$$

ou $$\Delta\mu_0 = 0{,}000\,007 \text{ g/cm}^3.$$

La valeur numérique de μ_0 est connue avec une incertitude de 7 unités sur la sixième décimale. Nous écrirons donc

$$0{,}999\,840 - 0{,}000\,007 \leqslant \mu_0 \leqslant 0{,}999\,840 + 0{,}000\,007,$$

$$0{,}999\,833 \text{ g/cm}^3 \leqslant \mu_0 \leqslant 0{,}999\,847 \text{ g/cm}^3,$$

ou, plus simplement.

$$\mu_0 = (0{,}999\,840 \pm 0{,}000\,007) \text{ g/cm}^3.$$

36. — Équilibre d'un solide totalement immergé dans deux liquides superposés.

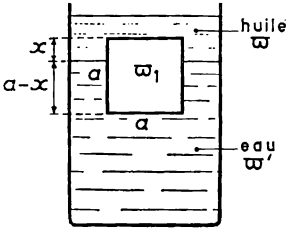
Dans une éprouvette contenant de l'eau, on verse un peu d'huile de densité 0,85. On y introduit un petit cube en matière solide non soluble de 5 mm de côté dont deux faces restent constamment horizontales. Sa densité est 0,95. Dans quelle région de l'éprouvette sera-t-il en équilibre?

Quelle sera la hauteur d'arête baignant dans l'huile?

(Bacc., Paris, partiel.)

Le cube ne peut être en équilibre dans l'huile seule : sa densité étant supérieure à celle de l'huile, il tomberait au fond.

Il ne peut non plus être en équilibre dans l'eau seule : sa densité étant plus faible que celle de l'eau, il remonterait à la surface et émergerait partiellement.



Par contre, il peut être en équilibre dans la région de l'éprouvette commune aux deux liquides.

Dans ce cas, le poids du solide est égal à la poussée d'Archimède, laquelle est égale à la somme des poids des deux liquides déplacés.

Soient a l'arête du cube, ϖ_1 son poids volumique, x la hauteur d'arête immergée dans l'huile, ϖ et ϖ' les poids volumiques de l'huile et de l'eau.

La condition d'équilibre s'écrit ainsi :

$$\varpi_1 \times a^3 = \varpi \times a^2 \times x + \varpi' \times a^2 (a - x).$$

Divisons par $\varpi' \times a^2$:

$$\frac{\varpi_1}{\varpi'} \times a = \frac{\varpi}{\varpi'} \times x + a - x.$$

Les rapports $\frac{\varpi_1}{\varpi'}$ et $\frac{\varpi}{\varpi'}$ représentent les densités d_1 et d du solide et de l'huile par rapport à l'eau :

$$d_1 \times a = d \times x + a - x.$$

Cette équation permet de calculer x :

$$x = \frac{1 - d_1}{1 - d} \times a.$$

Application numérique :

$$d_1 = 0{,}95, \quad d = 0{,}85, \quad a = 5 \text{ mm, ou } 0{,}5 \text{ cm},$$

$$x = \frac{1 - 0{,}95}{1 - 0{,}85} \times 0{,}5 = \frac{0{,}05}{0{,}15} \times 0{,}5,$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}166 \text{ cm.}}$$

37. — Distance du centre de gravité au centre de poussée d'un corps flottant.

Un corps solide cylindrique est formé d'une partie métallique de densité 7 et de hauteur 1 cm et d'une partie en bois de densité 0,7 et de hauteur 29 cm. On le plonge dans un liquide de densité d.

1° Calculer la distance du centre de gravité au centre de poussée.

2° De quelle hauteur le corps s'enfonce-t-il dans l'eau ?

3° Quelle serait la densité du liquide dans lequel le corps, complètement immergé, serait en équilibre ?

(Bacc., Lille.)

1° Détermination du centre de gravité du solide. — Le centre de gravité d'un solide hétérogène s'obtient en cherchant la position de la résultante des forces de pesanteur correspondant à chacune des parties homogènes.

Dans le cas présent, nous décomposons le solide en deux parties cylindriques coaxiales dont nous connaissons, pour chacune d'elles, le poids et la position du centre de gravité (centre de symétrie de chaque cylindre) (*fig.* 1)

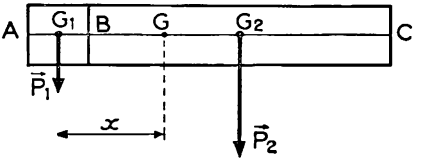


FIG. 1.

Soient $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ les poids des deux parties du solide, G_1 et G_2 leurs centres de gravité, G le centre de gravité de l'ensemble, situé à la distance de x de G_1.

Écrivons que la résultante de $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ est appliquée en G :

$$P_1 \times x = P_2 (G_1G_2 - x). \quad (1)$$

Désignons par s la section du cylindre, par d_1 et d_2 les densités du fer et du bois et par ϖ_0 le poids volumique de l'eau.

$$P_1 = \varpi_0 \times d_1 \times s \times AB, \quad P_2 = \varpi_0 \times d_2 \times s \times BC.$$

L'équation (1) devient

$$\varpi_0 \times d_1 \times s \times AB \times x = \varpi_0 \times d_2 \times s \times BC\,(G_1G_2 - x).$$

Nous en tirons x :

$$x = \frac{d_2 \times BC \times G_1G_2}{d_1 \times AB + d_2 \times BC}.$$

La distance a du centre de gravité G à l'extrémité A est donc

$$a = AG = \frac{AB}{2} + x.$$

Numériquement :

$$d_1 = 7, \quad d_2 = 0{,}7, \quad \text{AB} = 1 \text{ cm}, \quad \text{BC} = 29 \text{ cm},$$

$$\text{G}_1\text{G}_2 = \frac{\text{AB}}{2} + \frac{\text{BC}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{29}{2} = 15 \text{ cm}.$$

$$x = \frac{0{,}7 \times 29 \times 15}{7 \times 1 + 0{,}7 \times 29} = \frac{2{,}9 \times 15}{1 + 2{,}9} = 11{,}15 \text{ cm},$$

$$a = \frac{1}{2} + 11{,}15 = 11{,}65 \text{ cm}, \qquad \boldsymbol{a = 11{,}7 \text{ cm}}.$$

Détermination du centre de poussée. — Le centre de poussée d'un solide quelconque, partiellement ou totalement immergé, est le point d'application de la poussée d'Archimède. Ce point G′ est le centre de gravité du liquide déplacé (*fig.* 2).

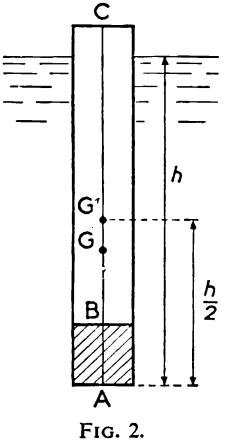


FIG. 2.

Si nous voulons que le cylindre flotte librement de manière que son axe reste vertical, la partie immergée ayant une hauteur h, le centre de poussée sera situé à la distance $\frac{h}{2}$ de la surface libre du liquide et de la base immergée.

L'équilibre sera stable si le centre de gravité reste en dessous du centre de poussée : la partie métallique devra donc être en bas.

La hauteur d'immersion, h, dépend de la densité d du liquide. Elle est donnée par la condition d'équilibre du corps flottant :

Poids = Poussée du liquide.

$$\text{P}_1 + \text{P}_2 = \varpi_0 \times d \times s \times h,$$

ou, en remplaçant P_1 et P_2 par les expressions précédemment trouvées,

$$\varpi_0 \times d_1 \times s \times \text{AB} + \varpi_0 \times d_2 \times s \times \text{BC} = \varpi_0 \times d \times s \times h.$$

Nous en tirons

$$h = \frac{d_1 \times \text{AB} + d_2 \times \text{BC}}{d}.$$

Numériquement :

Avec les valeurs précédentes,

$$(2) \qquad h = \frac{7 \times 1 + 0{,}7 \times 29}{d} = \frac{27{,}3}{d} \text{ cm}.$$

La distance a' du centre de poussée G′ à l'extrémité A est donc

$$a' = \frac{h}{2} = \frac{\boldsymbol{27{,}3}}{\boldsymbol{2\,d}} \textbf{ cm}.$$

La distance du centre de gravité au centre de poussée est

$$GG' = AG' - AG = a' - a,$$

$$GG' = \frac{27{,}3}{2\,d} - 11{,}65 \text{ cm}.$$

Cette distance dépend de la densité du liquide.

Remarque. — Cherchons pour quelles valeurs de d l'équilibre du corps est stable. Il suffit que G' soit au-dessus de G, c'est-à-dire que $a' - a$ soit positif :

$$\frac{27{,}3}{2\,d} - 11{,}65 > 0,$$

ou

$$d < \frac{27{,}3}{2 \times 11{,}65},$$

$$d < 1{,}17.$$

Si $d = 1{,}17$, G et G' sont confondus : le corps est en équilibre indifférent.

Si $d > 1{,}17$, G est au-dessus de G' : le corps est en équilibre instable.

2° **Hauteur du corps immergée.** — Le corps s'enfonce dans l'eau de la hauteur h donnée par l'expression (2) dans laquelle $d = 1$.

$$h = 27{,}3 \text{ cm}.$$

3° **Densité du liquide.** — La densité du liquide dans lequel le corps, complètement immergé, serait en équilibre est donnée par la même expression (2) dans laquelle

$$h = AC = 29 + 1 = 30 \text{ cm},$$

$$d = \frac{27{,}3}{h} = \frac{27{,}3}{30},$$

$$d = 0{,}91.$$

38. — Corps flottant dans deux liquides superposés.

1° Un tube cylindrique fermé à sa partie inférieure et lesté plonge de 10 cm quand il flotte sur l'eau. Il plonge de 12,5 cm en flottant sur un liquide L de densité inconnue. Quelle est la densité de ce liquide?

2° On plonge le tube dans un récipient contenant de l'eau surmontée d'une couche de 5 cm de hauteur du liquide L, dont on vient de déterminer la densité et qu'on suppose non miscible à l'eau. Quelle est la longueur du tube immergée lorsqu'il flotte dans ces conditions? *(Bacc., Dijon.)*

1° Le tube cylindrique fermé à sa partie inférieure est lesté de façon que, son centre de gravité étant près de sa partie inférieure, il prenne une position d'équilibre stable en flottant sur un liquide.

Cette position d'équilibre stable est définie par deux conditions :

condition d'équilibre : poids du corps = poussée du liquide,

condition de stabilité : le centre de gravité est au-dessous du centre de poussée (le lest réalise cette condition).

Lorsque le tube flotte sur l'eau de poids volumique ϖ_0, il s'enfonce d'une longueur l et le volume d'eau déplacé est $s \times l$, s étant la section droite du tube (*fig.* 1).

Si p est le poids du tube lesté,

(1) $$p = \varpi_0 \times s \times l.$$

Lorsque le tube flotte sur le liquide L de densité d ou de poids volumique $\varpi_0 \times d$, il s'enfonce d'une longueur l'. La condition d'équilibre est alors

$$p = \varpi_0 \times d \times s \times l'.$$

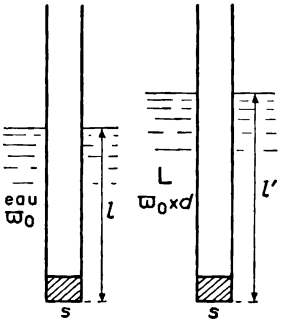


FIG. 1.

On a immédiatement

$$d \times l' = l,$$

ou $$d = \frac{l}{l'}.$$

Application numérique :

$l = 10$ cm; $\quad l' = 12{,}5$ cm.

$$d = \frac{10}{12{,}5}, \qquad \boldsymbol{d = 0{,}8.}$$

2° Désignons par x la longueur de tube immergée dans l'eau et par a l'épaisseur de la couche de liquide L (*fig.* 2).

La condition d'équilibre est dans ce cas :

poids du corps = somme des poussées des deux liquides.

La condition de stabilité est toujours réalisée.

La poussée de l'eau est égale à $\varpi_0 \times s \times x$.

La poussée du liquide L est égale à $\omega_0 \times d \times s \times a$.

(2) $$p = \varpi_0 \times s \times x + \varpi_0 \times d \times s \times a.$$

D'autre part, le poids du tube p est donné par l'expression (1) :

$$p = \varpi_0 \times s \times l.$$

En portant cette valeur de p dans l'équation (2) et après simplification nous obtenons l'équation suivante :

$$l = x + d \times a,$$

qui nous permet de calculer x :

$$x = l - d \times a.$$

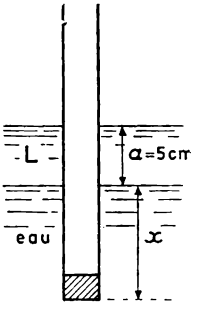


FIG. 2.

Application numérique :

$$l = 10 \text{ cm}; \qquad d = 0{,}8; \qquad a = 5 \text{ cm}.$$

$$x = 10 - 0{,}8 \times 5 \text{ cm}, \qquad \boldsymbol{x = 6 \text{ cm}.}$$

La longueur totale d'immersion est

$$x + a = 6 + 5, \qquad \boldsymbol{x + a = 11 \text{ cm}.}$$

39. — Étude d'un alcoomètre de Gay-Lussac.

Un alcoomètre de Gay-Lussac s'enfonce jusqu'à la division 100 dans l'alcool pur à la température de 15 °C (densité : 0,795) et jusqu'à la division 0 dans l'eau, de masse volumique 1 g/cm³.

1° En déduire le rapport du volume V de la partie inférieure de l'instrument jusqu'au 0 et du volume *v* de la tige compris entre les divisions 0 et 100.

2° La distance qui sépare les divisions 0 et 100 est 15 cm. Quelle est celle qui sépare les divisions 0 et 50, sachant que la densité à 15 °C d'un mélange d'eau et d'alcool titrant 50° Gay-Lussac est 0,934? Quelle conclusion peut-on en tirer quant à la disposition des divisions de la tige?

3° La distance qui sépare les divisions 0 et 70 étant 7,17 cm, quelle est la densité d'un mélange d'eau et d'alcool titrant 70° Gay-Lussac?

En déduire le volume d'eau qu'il faudrait ajouter à 70 cm³ d'alcool pur, pour obtenir 100 cm³ de mélange. Quelle est la contraction qui se produit, lorsqu'on mélange l'eau et l'alcool dans ces proportions? Il est rappelé que 100 cm³ d'alcool à 70° Gay-Lussac contiennent 70 cm³ d'alcool pur.

(Bacc., Toulouse.)

1° Écrivons les équations d'équilibre de l'alcoomètre dans l'alcool et dans l'eau :

$$\text{poids} = \text{poussée du liquide.}$$

Désignons par μ_0 la masse volumique de l'eau et par m la masse de l'alcoomètre.

Dans l'alcool de densité d, ou de masse volumique $\mu_0 \times d$, l'alcoomètre est immergé jusqu'à la division 100 de la tige. Le volume immergé comprend le volume, V, de la carène et celui, v, de la tige :

$$(1) \qquad m \times g = \mu_0 \times d(\mathrm{V} + v)g.$$

Dans l'eau, de masse volumique μ_0, l'alcoomètre est immergé jusqu'à la division 0 de la tige. Le volume immergé est le volume V de la carène :

$$(2) \qquad m \times g = \mu_0 \times \mathrm{V} \times g.$$

Ces deux relations nous donnent, après simplification,

$$d(\mathrm{V} + v) = \mathrm{V}.$$

Divisons par v :

$$d\left(\frac{V}{v}+1\right)=\frac{V}{v}\cdot$$

$$\frac{V}{v}=\frac{d}{1-d}\cdot$$

Application numérique :

$$d=0{,}795.$$

$$\frac{V}{v}=\frac{0{,}795}{1-0{,}795}=\frac{0{,}795}{0{,}205}=3{,}878,$$

$$\frac{V}{v}=\mathbf{3{,}88.}$$

2° Dans le mélange titrant 50° G. L. dont la densité est d' et la masse volumique $\mu_0 \times d'$, la longueur de la partie immergée de la tige est a. Le volume total immergé est le volume de la carène augmenté du volume de la tige de longueur a. Si l est la longueur totale de la tige le volume de la partie de longueur a est $\frac{v \times a}{l}$.

La condition d'équilibre s'écrit, dans ce cas,

$$m \times g = \mu_0 \times d' \left(V + \frac{v \times a}{l}\right) g,$$

ou, en tenant compte de la relation (2),

$$\mu_0 \times V \times g = \mu_0 \times d' \left(V + \frac{v \times a}{l}\right) g.$$

Divisons par $\mu_0 g v$, nous obtenons

$$\frac{V}{v} = d'\left(\frac{V}{v}+\frac{a}{l}\right)\cdot \tag{3}$$

Cette relation permet de calculer a si d' est donné :

$$\frac{a}{l}=\frac{V}{v}\left(\frac{1}{d'}-1\right)\cdot$$

$$a=\frac{V}{v}\times\frac{1-d'}{d'}\times l.$$

Application numérique :

$$\frac{V}{v}=\frac{0{,}795}{0{,}205}; \qquad d'=0{,}934; \qquad l=15 \text{ cm}.$$

$$a=\frac{0{,}795}{0{,}205}\times\frac{1-0{,}934}{0{,}934}\times 15=\frac{0{,}795\times 0{,}066\times 15}{0{,}205\times 0{,}934}\text{ cm}$$

$$\mathbf{a = 4{,}11 \text{ cm}.}$$

Le trait 50 n'est pas au milieu de l'intervalle de 0 à 100. Il est plus près du trait zéro. Les divisions de l'alcoomètre correspondant à 1 degré occupent des longueurs différentes : elles sont plus serrées vers le bas de la tige que vers le haut.

3° La densité, d', d'un mélange de titre donné peut se calculer si l'on connaît la longueur, a, de tige immergée.

La condition d'équilibre est celle du paragraphe 2. Elle conduit à la relation (3) entre d' et a. On en déduit d' :

$$d' = \frac{\dfrac{V}{v}}{\dfrac{V}{v} + \dfrac{a}{l}}.$$

Application numérique :

$$\frac{V}{v} = \frac{0{,}795}{0{,}205}; \qquad a = 7{,}17 \text{ cm}; \qquad l = 15 \text{ cm}.$$

$$d' = \frac{\dfrac{0{,}795}{0{,}205}}{\dfrac{0{,}795}{0{,}205} + \dfrac{7{,}17}{15}} = \frac{0{,}795 \times 15}{0{,}795 \times 15 + 7{,}17 \times 0{,}205},$$

$$\boldsymbol{d' = 0{,}890.}$$

Cette valeur, d', de la densité du mélange de titre 70 permet de calculer le volume v_1 d'eau qu'il faut ajouter à 70 cm³ d'alcool pur pour obtenir 100 cm³ de mélange de titre 70.

La masse de 100 cm³ de ce mélange est

$$\mu_0 \times d' \times 100 = 1 \times 0{,}890 \times 100 = 89 \text{ g}.$$

Écrivons que cette masse est égale à la somme des masses d'alcool et d'eau prises séparément :

$$89 = 1 \times 0{,}795 \times 70 + 1 \times v,$$

$$v = 89 - 55{,}65 \text{ cm}^3,$$

$$v = 33{,}35 \text{ cm}^3.$$

Pour obtenir 100 cm³ de mélange titrant 70 degrés Gay-Lussac il faut donc prendre 70 cm³ d'alcool et 33,35 cm³ d'eau.

Le volume avant mélange est

$$70 + 33{,}35 = 103{,}35 \text{ cm}^3.$$

Le volume final étant 100 cm³, la contraction qui se produit lorsqu'on mélange l'eau et l'alcool est

$$\mathbf{103{,}35 - 100 = 3{,}35 \text{ cm}^3.}$$

CHAPITRE X

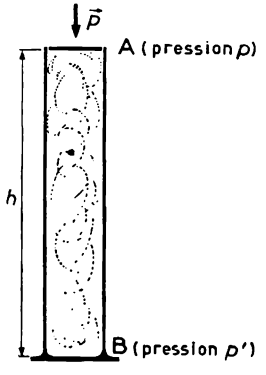
Statique des gaz.

40. — Différence de pression entre la base et le haut d'une éprouvette remplie de chlore.

Une éprouvette ayant 40 cm de hauteur est remplie de chlore sous la pression de 10^5 pascals. Le poids volumique du chlore est, dans ces conditions, 30 N/m³. Quelle est la différence de pression entre la base et le haut de l'éprouvette? Quelle est la variation relative maximale de la pression?

Nous pouvons supposer que l'éprouvette emplie de chlore est fermée par un obturateur de poids négligeable sur lequel s'exerce la pression $p = 10^5$ pascals.

La pression du gaz au voisinage de l'obturateur est égale à p. Elle croît avec la profondeur. Elle a sa valeur maximale, p', au fond de l'éprouvette.



Le gaz étant compressible, son poids volumique croît également avec la profondeur. La valeur donnée $\varpi = 30$ N/m³ est une valeur moyenne.

La différence de pression entre les points A et B situés aux deux extrémités de l'éprouvette est donnée par le principe général de l'hydrostatique appliqué aux gaz :

$$p' - p = \varpi \times h.$$

La variation relative maximale de pression entre deux points de la colonne de gaz est

$$\frac{p' - p}{p} = \frac{\varpi \times h}{p}.$$

Application numérique :

$\varpi = 30$ N/m³; $h = 40$ cm, ou 0,40 m; $p = 10^5$ pascals.

$$p' - p = 30 \times 0{,}40 = \mathbf{12} \text{ pascals.}$$

$$\frac{p' - p}{p} = \frac{12}{10^5}.$$

Si nous admettons que la pression est la même en tous les points de la colonne gazeuse, nous commettons une erreur relative inférieure à $\frac{12}{10^5}$. Cette erreur peut être considérée comme négligeable.

Ce résultat peut être généralisé :

La pression d'un gaz est sensiblement la même en tous les points du récipient qui le contient.

41. — Étude d'un baroscope.

1° Aux deux extrémités d'un fléau de balance à bras égaux sont suspendues deux sphères de rayons 2 et 10 cm. Dans l'air, le fléau est en équilibre, son axe étant horizontal.

L'appareil est placé sous une cloche où l'on fait le vide. Le fléau s'incline. Dans quel sens?

Quelle est la différence des poids réels et des masses des deux sphères?

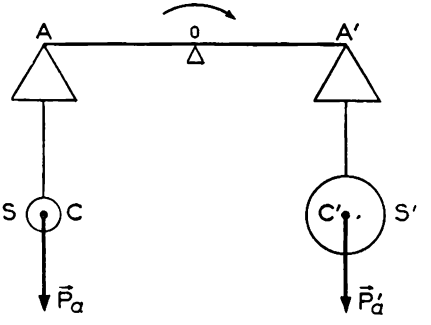
2° La position d'équilibre du fléau est modifiée de façon appreciable pour une surcharge de l'un des plateaux égale à 0,5 cg. A quelle variation du poids volumique et de la masse volumique de l'air l'appareil est-il sensible?

Masse volumique de l'air : 0,001 3 g/cm³. Intensité de la pesanteur : 10 N/kg.

1° Chacune des sphères S et S′ est soumise à deux forces verticales et de sens opposé :

— son poids;

— la poussée d'Archimède, égale au poids du volume d'air qu'elle déplace.



La résultante de ces deux forces est le poids apparent de la sphère. C'est une force verticale, dirigée de haut en bas et appliquée en son centre.

Le fléau est en équilibre dans l'air : la somme algébrique des moments par rapport à l'axe O des poids apparents $\vec{P_a}$ et $\vec{P'_a}$ est nulle (théorème des moments) :

$$P_a \times OA - P'_a \times OA' = 0,$$

ou, puisque $OA = OA'$,

$$P_a = P'_a.$$

Lorsque nous faisons le vide autour de l'appareil, nous éliminons la poussée d'Archimède qui s'exerce sur chaque sphère. Celle qui

s'exerce sur la grande sphère S' étant supérieure à celle qui s'exerce sur la petite, S, le fléau s'incline du côté de la première. Le poids réel, P', de S' est donc supérieur au poids réel, P, de S.

Désignons par ϖ_0 le poids volumique de l'air et par R et R' les rayons des deux sphères.

La petite sphère a un volume $v = \frac{4}{3}\pi R^3$. Son poids apparent dans l'air est

$$P_a = P - \varpi_0 \times v.$$

La grande sphère a un volume $v' = \frac{4}{3}\pi R'^3$. Son poids apparent dans l'air est

$$P'_a = P' - \varpi_0 \times v'.$$

L'équilibre des deux poids apparents se traduit par l'égalité

$$P - \varpi_0 \times v = P' - \varpi_0 \times v'.$$

Nous en tirons

(1) $$P' - P = \varpi_0 (v' - v),$$

ou $$P' - P = \varpi_0 \times \frac{4}{3} \times \pi (R'^3 - R^3).$$

Si nous désignons par a_0 la masse volumique de l'air et par g l'intensité de la pesanteur, le poids volumique de l'air est $\varpi_0 = a_0 \times g$ et, par suite, la différence des poids des deux sphères est

(2) $$P' - P = a_0 \times g \times \frac{4}{3} \times \pi (R'^3 - R^3).$$

Si nous désignons par M et M' les masses des deux sphères, leurs poids sont respectivement $P = M \times g$ et $P' = M' \times g$; par suite, la différence des masses des deux sphères est

$$M' - M = \frac{P' - P}{g}.$$

Application numérique :

$$a_0 = 0{,}001\,3 \text{ g/cm}^3, \text{ ou } 1{,}3 \text{ kg/m}^3;$$

$g = 10$ N/kg; $R = 2$ cm, ou 2×10^{-2} m; $R' = 10$ cm, ou 10×10^{-2} m.

$$P' - P = 1{,}3 \times 10 \times \frac{4}{3} \times 3{,}14\,(10^3 - 2^3)\,10^{-6},$$

$$P' - P = \mathbf{0{,}054\ N},$$

$$M' - M = \frac{0{,}054}{10} = 0{,}005\,4 \text{ kg},$$

$$M' - M = \mathbf{5{,}4\ g}.$$

2° Lorsque le poids volumique de l'air passe de la valeur ϖ_0 à la valeur ϖ_1, le poids apparent de chaque sphère devient

(sphère S) $\qquad P_{1a} = P - \varpi_1 \times v,$

(sphère S') $\qquad P'_{1a} = P' - \varpi_1 \times v'.$

Supposons $\varpi_1 < \varpi_0$. La poussée d'Archimède s'exerçant sur la grande sphère diminue plus que celle qui s'exerce sur la petite :

$$P'_{1a} > P_{1a}.$$

Le fléau s'incline du côté de la sphère S'. Pour rétablir l'équilibre, il faut placer sur le plateau supportant la sphère S une surcharge de masse m et de poids p telle que

$$p = P'_{1a} - P_{1a} = (P' - \varpi_1 \times v') - (P - \varpi_1 \times v),$$

ou $\qquad p = (P' - P) - \varpi_1(v' - v).$

Tenons compte de (1) :

$$p = \varpi_0(v' - v) - \varpi_1(v' - v) = (\varpi_0 - \varpi_1)(v' - v).$$

La variation de poids volumique de l'air correspondant à la surcharge donnée est

$$\varpi_0 - \varpi_1 = \frac{p}{v' - v},$$

ou

$$\varpi_0 - \varpi_1 = \frac{m \times g}{v' - v}.$$

La variation de masse volumique de l'air est, en désignant par a_1 la nouvelle valeur de celle-ci,

$$a_0 - a_1 = \frac{\varpi_0 - \varpi_1}{g}.$$

Application numérique :

$$m = 0{,}5 \text{ cg, ou } 5 \times 10^{-6} \text{ kg}; \quad g = 10 \text{ N/kg};$$

$$v' - v = \frac{4}{3}\pi(R'^3 - R^3) = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \ (10^3 - 2^3) \times 10^{-6} = 4\,153 \times 10^{-6} \text{ m}^3;$$

$$\varpi_0 - \varpi_1 = \frac{5 \times 10^{-6} \times 10}{4\,153 \times 10^{-6}}, \qquad \varpi_0 - \varpi_1 = \mathbf{0{,}012\,0 \text{ N/m}^3}.$$

$$a_0 - a_1 = \frac{0{,}012\,0}{10}, \qquad a_0 - a_1 = \mathbf{0{,}001\,2 \text{ kg/m}^3}.$$

42. — Correction de poussée de l'air dans une pesée.

Sur le plateau de gauche d'une balance sensible au milligramme on place un corps de masse inconnue X, que l'on équilibre par des masses marquées M_1 sur le plateau de droite.

On place ensuite X sur le plateau de droite et on l'équilibre par des masses marquées M_2 sur le plateau de gauche.

La pesée est faite dans l'air dont la masse volumique est a. Les masses M_1 et M_2 sont étalonnées dans le vide. Leur masse volumique est μ.

Calculer X, ainsi que l'erreur relative sur la pesée, si l'on néglige la poussée de l'air.

On désignera par μ' la masse volumique du corps à peser.

Application numérique :

$M_1 = 100{,}000$ g,
$M_2 = 100{,}020$ g,
$\mu = 9{,}1$ g/cm³,
$\mu' = 0{,}91$ g/cm³,
$a = 0{,}001\,3$ g/cm³.

La balance n'est pas juste. Désignons par l_1 et l_2 les longueurs des bras droit et gauche du fléau.

La balance est en équilibre lorsque la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe, des poids apparents du corps et des masses marquées est nulle.

Le corps de masse X a un volume $\frac{X}{\mu'}$. Son poids apparent est, en désignant par g l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience,

$$X \times g - a \times \frac{X}{\mu'} \times g = X\left(1 - \frac{a}{\mu'}\right)g.$$

De même, les poids apparents des masses marquées sont respectivement

$$M_1\left(1 - \frac{a}{\mu}\right)g \qquad \text{et} \qquad M_2\left(1 - \frac{a}{\mu}\right)g.$$

Écrivons pour les deux équilibres le théorème des moments :

$$X\left(1 - \frac{a}{\mu'}\right)g \times l_2 - M_1\left(1 - \frac{a}{\mu}\right)g \times l_1 = 0,$$

$$M_2\left(1 - \frac{a}{\mu}\right)g \times l_2 - X\left(1 - \frac{a}{\mu'}\right)g \times l_1 = 0.$$

Mettons ces équations sous une forme plus simple :

$$X\left(1-\frac{a}{\mu'}\right)l_2 = M_1\left(1-\frac{a}{\mu}\right)l_1,$$

$$M_2\left(1-\frac{a}{\mu}\right)l_2 = X\left(1-\frac{a}{\mu'}\right)l_1.$$

En divisant membre à membre nous éliminons l_2 et l_1 :

$$\frac{X}{M_2}\times\frac{1-\frac{a}{\mu'}}{1-\frac{a}{\mu}} = \frac{M_1}{X}\times\frac{1-\frac{a}{\mu}}{1-\frac{a}{\mu'}},$$

$$X^2\left(1-\frac{a}{\mu'}\right)^2 = M_1\times M_2\left(1-\frac{a}{\mu}\right)^2,$$

d'où

$$X = \frac{1-\frac{a}{\mu}}{1-\frac{a}{\mu'}}\times\sqrt{M_1\times M_2}.$$

Si nous négligions la poussée d'Archimède due à l'air nous aurions pour la masse du corps une valeur X′ telle que

$$X' = \sqrt{M_1\times M_2}$$

et nous commettrions une erreur relative

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X'-X}{X} \simeq \frac{X'-X}{X'}.$$

Calculons cette expression :

$$\frac{X'-X}{X'} = 1-\frac{X}{X'} = 1-\frac{X}{\sqrt{M_1\times M_2}},$$

$$\frac{X'-X}{X} = 1-\frac{1-\frac{a}{\mu}}{1-\frac{a}{\mu'}} = \frac{\frac{a}{\mu}-\frac{a}{\mu'}}{1-\frac{a}{\mu'}}.$$

Finalement, nous obtenons

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{a(\mu'-\mu)}{\mu(\mu'-a)}.$$

Remarquons que $\frac{\Delta X}{X} = 0$ si $\mu' = \mu$, c'est-à-dire si la masse volumique du corps à peser est égale à celle des masses marquées.

Dans ce cas, la poussée d'Archimède s'exerce de la même façon sur le corps à peser et sur les masses marquées et nous avons

$$X = X' = \sqrt{M_1\times M_2}.$$

Application numérique :

$M_1 = 100{,}000$ g; $M_2 = 100{,}020$ g; $a = 0{,}001\,3$ g/cm³;

$\mu = 9{,}1$ g/cm³; $\mu' = 0{,}91$ g/cm³.

$$X = \frac{1 - \dfrac{0{,}001\,3}{9{,}1}}{1 - \dfrac{0{,}001\,3}{0{,}91}} \times \sqrt{100 \times 100{,}02} = \frac{1 - \dfrac{1}{7\,000}}{1 - \dfrac{1}{700}} \times 100{,}01,$$

$$X = \frac{6\,999}{6\,990} \times 100{,}01,$$

$$\mathbf{X = 100{,}138\ g.}$$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{0{,}001\,3\,(0{,}91 - 9{,}1)}{9{,}1\,(0{,}91 - 0{,}001\,3)} = -\frac{0{,}001\,3 \times 8{,}19}{9{,}1 \times 0{,}908\,7},$$

$$\frac{\Delta X}{X} = -\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{10\,000}}.$$

Ces résultats montrent que l'écart entre

$$X' = \sqrt{M_1 M_2} = 100{,}010\ \text{g}$$

et

$$X = 100{,}138\ \text{g},$$

égal à

$$X' - X = -0{,}128\ \text{g},$$

est très supérieur à l'erreur provenant de la sensibilité de la balance. Celle-ci étant de l'ordre de 0,001 g, on ne peut dans ce cas négliger la poussée d'Archimède.

43. — Calcul de la force ascensionnelle d'un ballon.

1° Un ballon sphérique, de 1 200 m³ de capacité, est gonflé avec de l'hydrogène dont la densité par rapport à l'air est 0,07. Au niveau du sol, la pression atmosphérique est 76 cm de mercure et la température 0 °C; dans ces conditions, le poids du litre d'air est 0,013 N. Quelle est la poussée exercée par l'air sur le ballon?

2° Le poids de l'enveloppe du ballon, des agrès, de la nacelle et des passagers est 8 000 N. Quel poids de lest doit-on emporter pour que la force ascensionnelle, au départ, soit 100 N?

3° Au cours de l'ascension, on jette une partie du lest. Quand le ballon cesse de monter le poids du litre de l'air qui l'entoure n'est plus que 0,010 N. Quel est le poids du lest qui a été jeté? On suppose invariable le poids du ballon. On sait d'autre part que la partie inférieure de l'enveloppe est munie d'une ouverture (manche) de telle sorte que le gaz contenu dans l'enveloppe est toujours à la même pression et à la même température que l'air extérieur.

(D'après Bacc., Dijon.)

1° Au sol, la poussée d'Archimède, $\vec{P'}$, exercée par l'air sur le ballon est égale au poids de l'air occupant le volume V du ballon. Si ϖ_0 désigne le poids volumique de l'air au niveau du sol, la poussée d'Archimède a pour valeur

(1) $$P' = \varpi_0 \times V.$$

Si l'on exprime le poids volumique en N/m³ et le volume V en m³, la poussée sera obtenue en newtons.

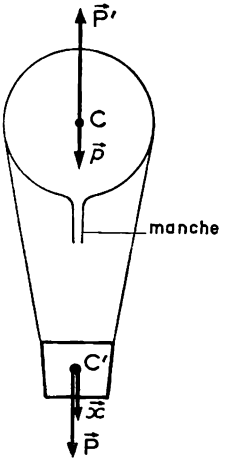
Application numérique :

$\varpi_0 = 0{,}013$ N/l, ou 13 N/m³; $V = 1\,200$ m³;

$$P' = 13 \times 1\,200,$$

$$\mathbf{P' = 15\,600\ N.}$$

2° La force ascensionnelle au départ est la résultante des diverses forces qui s'exercent sur le ballon :



— la poussée d'Archimède : $\vec{P'} = \vec{\varpi_0} \times V$;

— le poids de l'hydrogène, de poids volumique $\varpi_0 \times d$, soit $\vec{p} = \vec{\varpi_0} \times d \times V$;

— le poids $\vec{P}$ de l'enveloppe, des agrès, de la nacelle et des passagers;

— le poids, $\vec{x}$, du lest.

Toutes ces forces sont verticales et concourantes. Leur résultante $\vec{F}$ a pour valeur

$$F = P' - p - P - x.$$

Le poids du lest est donc

$$x = P' - p - P - F,$$

$$x = \varpi_0 V - \varpi_0 \times d \times V - P - F,$$

(2) $$x = \varpi_0 V(1 - d) - P - F.$$

Application numérique :

$\varpi_0 \times \dot{V} = 15\,600$ N; $d = 0{,}07$, $P = 8\,000$ N; $F = 100$ N.

$$x = 15\,600\,(1 - 0{,}07) - 8\,000 - 100,$$

$$x = 15\,600 \times 0{,}93 - 8\,100 = 6\,408 \text{ N},$$

$$\mathbf{x = 6\,400\ N.}$$

3° Au cours de l'ascension, le volume du ballon reste constant grâce à la présence de la manche. Par contre, le poids volumique de l'air diminue. La poussée d'Archimède décroît. Il en est de même de la force ascensionnelle. Pour lui conserver une valeur suffisante, on doit diminuer x : il faut jeter du lest.

Quand le ballon cesse de monter, la force ascensionnelle F est nulle. A ce moment, le poids volumique de l'air est ϖ, celui de l'hydrogène est $\varpi \times d$ (d n'a pas changé puisque l'air et l'hydrogène sont dans les mêmes conditions de température et de pression). Le poids du lest est

$$x' = \varpi(1 - d)\,V - P - 0. \tag{3}$$

Le poids du lest qu'on a dû jeter est égal à la différence $x - x'$. Retranchons membre à membre les égalités (2) et (3) :

$$x - x' = \varpi_0(1 - d)\,V - \varpi(1 - d)\,V - F,$$

$$x - x' = (\varpi_0 - \varpi)(1 - d)\,V - F.$$

Application numérique :

$\varpi_0 = 0{,}013$ N/l, ou 13 N/m³; $\varpi = 0{,}010$ N/l, ou 10 N/m³;

$d = 0{,}07$; $V = 1\,200$ m³; $F = 100$ N.

$$x - x' = (13 - 10)(1 - 0{,}07)\,1\,200 - 100,$$

$$x - x' = 3 \times 0{,}93 \times 1\,200 - 100 = 3\,248 \text{ N},$$

$$\boldsymbol{x - x' = 3\,250 \text{ N}}.$$

CHAPITRE XI

Loi de Mariotte.

44. — Étude de la compressibilité de l'air.

Un tube de verre cylindrique a une section intérieure de 1 cm^2; il est fermé à une extrémité, A. Il contient de l'air isolé de l'extérieur par un piston mobile, B, qui peut glisser sans frottement à l'intérieur du tube; ce piston pèse 2 newtons.

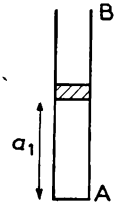


FIG. 1.

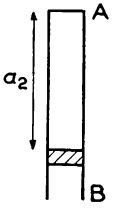


FIG. 2.

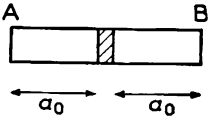


FIG. 3.

1° Le tube est placé verticalement, d'abord l'extrémité A en bas (*fig.* 1), puis l'extrémité A vers le haut (*fig.* 2). La colonne d'air emprisonné prend successivement les longueurs $a_1 = 30$ cm et $a_2 = 45$ cm. En déduire la pression atmosphérique, p.

2° Le tube étant placé horizontalement, quelle est alors la longueur a_0 de la colonne d'air emprisonné?

3° On incline le tube à 45°. Quelles sont les longueurs a' et a'' de la colonne d'air emprisonné suivant que l'extrémité fermée A est placée vers le bas ou vers le haut?

4° Le tube étant horizontal, on ferme l'extrémité B, emprisonnant ainsi deux colonnes ayant la même longueur a_0 que dans le 2° et renfermant de l'air sous pression atmosphérique p (*fig.* 3). Quelles sont les longueurs de ces deux colonnes lorsque le tube est placé verticalement?

La température reste constante pendant toute la durée de ces expériences.

(Bacc., Bordeaux.)

1° Lorsque le tube, de section s, est placé verticalement, l'extrémité A en bas (*fig.* 1), le poids $\vec{P}$ du piston exerce sur la masse d'air qu'il contient une pression $\frac{P}{s}$.

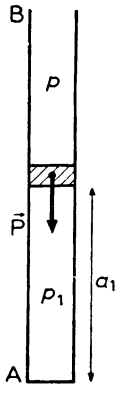


FIG. 1.

La pression de l'air est donc

$$p_1 = p + \frac{P}{s}$$

et son volume

$$v_1 = a_1 \times s.$$

Lorsque le tube est placé verticalement, l'extrémité A en haut (*fig.* 2), la pression de l'air est

$$p_2 = p - \frac{P}{s}$$

et son volume

$$v_2 = a_2 \times s.$$

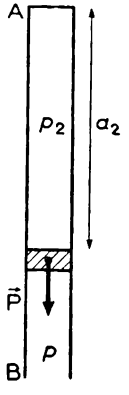


FIG. 2.

La température étant constante, la loi de Mariotte est applicable :

$$p_1 \times v_1 = p_2 \times v_2,$$

$$\left(p + \frac{P}{s}\right) \times a_1 \times s = \left(p - \frac{P}{s}\right) \times a_2 \times s.$$

Nous en tirons

$$p = \frac{P}{s} \times \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}.$$

Application numérique :

$a_1 = 30$ cm, ou 0,30 m; $a_2 = 45$ cm, ou 0,45 m; $P = 2$ N;

$s = 1$ cm², ou 0,000 1 m².

$$p = \frac{2}{0{,}000\,1} \times \frac{0{,}45 + 0{,}30}{0{,}45 - 0{,}30} = 20\,000 \times \frac{75}{15},$$

$p = 100\,000$ pascals, soit **1 atmosphère.**

2° Lorsque le tube est placé horizontalement (*fig.* 3), la pression p_3 de l'air est égale à la pression atmosphérique :

$$p_3 = p;$$

son volume est

$$v_3 = a_0 \times s.$$

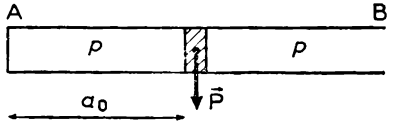


FIG. 3.

Comparons ce troisième état au premier. La loi de Mariotte est applicable :

$$p_1 \times v_1 = p_3 \times v_3,$$

$$\left(p + \frac{P}{s}\right) a_1 \times s = p \times a_0 \times s.$$

Nous en tirons

$$a_0 = a_1 \times \frac{p + \frac{P}{s}}{p}.$$

Application numérique :

$$a_1 = 30 \text{ cm, ou } 0{,}30 \text{ m};$$

$$p = 100\,000 \text{ Pa}; \qquad \frac{P}{s} = \frac{2}{0{,}000\,1} = 20\,000 \text{ Pa}.$$

$$a_0 = 0{,}30 \times \frac{100\,000 + 20\,000}{100\,000},$$

$$\boldsymbol{a_0 = 0{,}36 \text{ m}.}$$

3° Lorsque le tube fait un angle α avec l'horizontale, l'extrémité A en bas, le poids $\vec{P}$ du piston se décompose en une force P sin α dirigée suivant l'axe du tube et une force P cos α dirigée perpendiculairement à cet axe (*fig.* 4).

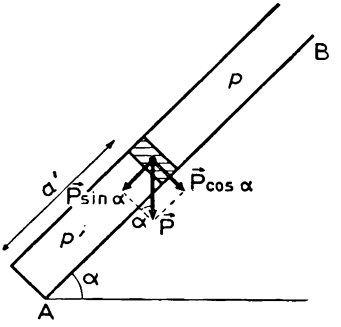


FIG. 4.

La pression p' de l'air est donc

$$p' = p + \frac{P}{s}\sin\alpha;$$

son volume est $v' = a' \times s$.

Comparons ce quatrième état au troisième. La loi de Mariotte est applicable :

$$p' \times v' = p_3 \times v_3,$$

$$\left(p + \frac{P}{s}\sin\alpha\right) a' \times s = p \times a_0 \times s.$$

Cette équation donne a' :

$$a' = a_0 \times \frac{p}{p + \frac{P}{s}\sin\alpha}.$$

Le tube étant retourné, l'extrémité A en haut (*fig.* 5), la pression p'' de l'air est

$$p'' = p - \frac{P}{s}\sin\alpha;$$

son volume est

$$v'' = a'' \times s.$$

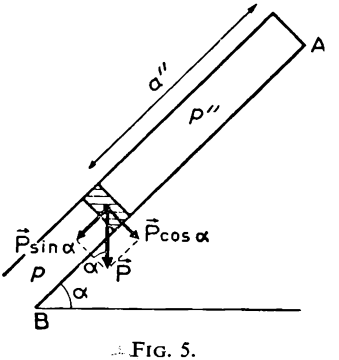


FIG. 5.

Comparons ce cinquième état au troisième. La loi de Mariotte est applicable :

$$p'' \times v'' = p_3 \times v_3,$$

$$\left(p - \frac{P}{s}\sin\alpha\right) \times a'' \times s = p \times a_0 \times s.$$

Cette équation donne a'' :

$$a'' = a_0 \times \frac{p}{p - \frac{P}{s}\sin\alpha}.$$

Application numérique :

$$a_0 = 0{,}36 \text{ m}; \qquad p = 100\,000 \text{ Pa};$$

$$\frac{P}{s}\sin\alpha = \frac{2}{0{,}000\,1} \times \sin 45^\circ = \frac{2}{0{,}000\,1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\,142 \text{ Pa}.$$

$$a' = 0{,}36 \times \frac{100\,000}{100\,000 + 14\,142} = \frac{0{,}36}{1{,}141\,42},$$

$$\boldsymbol{a' = 0{,}315 \text{ m},}$$

$$a'' = 0{,}36 \times \frac{100\,000}{100\,000 - 14\,142} = \frac{0{,}36}{0{,}858\,58},$$

$$\boldsymbol{a'' = 0{,}419 \text{ m}.}$$

4° Lorsque le tube, fermé aux deux extrémités, est placé verticalement (*fig.* 6), le piston descend d'une longueur x. Dans la partie supérieure, la pression du gaz est p'_0 et son volume

$$v'_0 = (a_0 + x) \times s.$$

Dans la partie inférieure, la pression du gaz est $p''_0 = p'_0 + \frac{P}{s}$ et son volume

$$v''_0 = (a_0 - x) \times s.$$

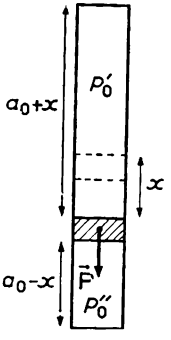


FIG. 6.

Dans chacune des parties, la masse de gaz est la même qu'au 2°; nous pouvons appliquer deux fois la loi de Mariotte :

$$p'_0 \times v'_0 = p_3 \times v_3,$$

$$p'_0 \times (a_0 + x) \times s = p \times a_0 \times s,$$

$$(1) \qquad p'_0 \times (a_0 + x) = p \times a_0.$$

$$p''_0 \times v''_0 = p_3 \times v_3,$$

$$\left(p'_0 + \frac{P}{s}\right) \times (a_0 - x) \times s = p \times a_0 \times s,$$

$$(2) \qquad \left(p'_0 + \frac{P}{s}\right) \times (a_0 - x) = p \times a_0.$$

Les relations (1) et (2) forment un système de deux équations à deux inconnues (p'_0 et x).

De (1) nous tirons

$$p'_0 = \frac{p \times a_0}{a_0 + x}.$$

En portant cette valeur dans (2),

$$\left(\frac{p \times a_0}{a_0 + x} + \frac{P}{s}\right) \times (a_0 - x) = p \times a_0.$$

Toutes réductions faites, cette équation devient

$$\frac{P}{s} \times x^2 + 2p \times a_0 \times x - \frac{P}{s} \times a_0^2 = 0. \quad (3)$$

Cette équation a deux racines de signes contraires. Seule, convient la racine positive.

Application numérique :

$$\frac{P}{s} = \frac{2}{0{,}000\,1} = 20\,000 \text{ Pa}; \qquad p = 100\,000 \text{ Pa}; \qquad a_0 = 0{,}36 \text{ m}.$$

L'équation (3) devient

$$20\,000\,x^2 + 2 \times 100\,000 \times 0{,}36\,x - 20\,000 \times 0{,}36^2 = 0,$$

$$x^2 + 3{,}6\,x - 0{,}129\,6 = 0,$$

$$x = -1{,}8 \pm \sqrt{1{,}8^2 + 0{,}129\,6},$$

$$x = -1{,}8 \pm 1{,}835.$$

La seule racine qui convienne est

$$x = -1{,}8 + 1{,}835 = 0{,}035 \text{ m}.$$

$$a'_0 = 0{,}36 + 0{,}035, \qquad \mathbf{a'_0 = 0{,}395 \text{ m}.}$$

$$a''_0 = 0{,}36 - 0{,}035, \qquad \mathbf{a''_0 = 0{,}325 \text{ m}.}$$

45. — Étude d'une pipette.

On plonge verticalement dans du mercure, sans aspirer, une pipette cylindrique de 20 cm de hauteur. Elle est ainsi remplie à moitié. On bouche l'orifice supérieur et on la sort du mercure.

1° Montrer qu'il s'écoule nécessairement du mercure.

2° Jusqu'à quelle hauteur en reste-t-il? Quelle est alors la pression de l'air dans la pipette?

Pression atmosphérique : 75 cm de mercure.

(Bacc. tech., Poitiers.)

1° Dans la position initiale, la pipette de section s et de longueur l contient de l'air occupant un volume

$$v = s \times \frac{l}{2},$$

sous la pression atmosphérique h cm de mercure. Nous bouchons du doigt l'orifice supérieur (*fig.* 1). Si nous soulevons le tube, le volume de l'air augmente. D'après la loi de Mariotte, sa pression doit diminuer. Le mercure monte donc à l'intérieur du tube jusqu'à une certaine hauteur (*fig.* 2).

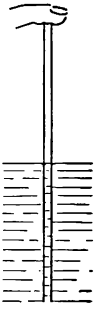


FIG. 1

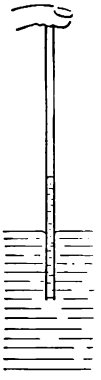


FIG. 2.

Lorsque l'extrémité ouverte affleure à la surface du mercure, le niveau de celui-ci à l'intérieur du tube est distant de x de la surface libre (*fig.* 3).

Si l'on retire complètement le tube, cette colonne de mercure est entraînée pourvu que la section s soit assez faible (*fig.* 4).

La hauteur x est nécessairement inférieure à $\frac{l}{2}$, puisque le volume de l'air a augmenté. Une partie du mercure s'est donc écoulée du tube.

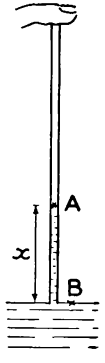


FIG. 3.

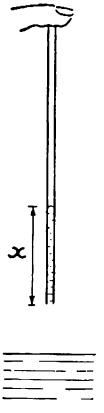


FIG. 4.

2° Pour calculer la hauteur x, nous appliquons la loi de Mariotte à la masse d'air constante contenue dans le tube et maintenue à température constante.

Dans l'état initial (*fig.* 1), la masse d'air occupe le volume

$$v = s \times \frac{l}{2},$$

sous la pression atmosphérique h cm de mercure.

Dans l'état final (*fig.* 4), la masse d'air occupe le volume

$$v' = s(l - x)$$

sous la pression h' cm de mercure.

Calculons la pression h'. D'après le principe général de l'hydrostatique, entre les points A et B du liquide en équilibre, la différence des pressions est donnée par l'expression

$$p_B - p_A = \varpi \times x,$$

ϖ étant le poids volumique du mercure.

Évaluons les pressions p_B et p_A en centimètres de mercure. La relation précédente s'écrit

$$\varpi \times h - \varpi \times h' = \varpi \times x,$$

d'où nous tirons

$$h - h' = x \qquad \text{et} \qquad h' = h - x.$$

Appliquons la loi de Mariotte :

$$h \times v = h' \times v',$$

$$h \times s \times \frac{l}{2} = (h - x) \times s(l - x).$$

Toutes réductions faites, la hauteur x est donnée par l'équation du second degré

$$x^2 - (h + l)x + \frac{hl}{2} = 0.$$

Cette équation a deux racines positives. La seule condition imposée à chacune d'elles est qu'elle soit inférieure à l.

Application numérique :

$$h = 75 \text{ cm}, \qquad l = 20 \text{ cm}.$$

$$x^2 - (75 + 20)x + \frac{75 \times 20}{2} = 0,$$

$$x^2 - 95\,x + 750 = 0,$$

$$x = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 4 \times 750}}{2} = \frac{95 \pm 77{,}6}{2}.$$

Seule, convient la racine

$$x = \frac{95 - 77{,}6}{2},$$

$$\boldsymbol{x = 8{,}7 \text{ cm}.}$$

La pression h' est donc

$$h' = h - x = 75 - 8{,}7,$$

$$\boldsymbol{h' = 66{,}3 \text{ cm de mercure}.}$$

46. — Influence de la pression sur la position d'équilibre d'un corps flottant.

Un corps solide flotte sur l'eau de telle sorte que la partie qui émerge dans l'air ait un volume de 151 cm³. On fait varier de 1 à 15 atmosphères la pression qui règne au-dessus de l'eau.

La position d'équilibre du corps solide est-elle modifiée? Si elle est modifiée, dans quel sens l'est-elle? Calculer de combien varie le volume de la partie qui émerge dans l'air.

On supposera l'eau incompressible et la loi de Mariotte exacte. Masse volumique de l'air sous la pression atmosphérique : $\frac{1}{770}$ g/cm³.

(Bacc. tech., Paris.)

Lorsque nous exprimons la condition d'équilibre d'un corps flottant par la relation

poids du corps solide = poids du liquide déplacé,

nous faisons abstraction du gaz qui surmonte le liquide. Nous raisonnons, en somme, comme si le vide existait au-dessus de celui-ci. Pour être rigoureux, nous devons tenir compte de toutes les poussées d'Archimède qui s'exercent sur le corps solide, poussée du liquide et poussée du gaz et écrire

poids du corps solide = somme des poids des fluides déplacés.

Si l'on fait varier la pression qui règne au-dessus du liquide, la masse volumique du gaz varie. Il en est de même de la poussée d'Archimède du gaz; la position d'équilibre du corps solide est donc modifiée.

Désignons par P le poids du solide, par V son volume, par v_1 le volume de la partie qui émerge dans l'air lorsque la pression est p_1, par v_2 le volume qui émerge quand la pression est p_2. L'eau étant supposée incompressible, sa masse volumique μ est indépendante de la pression. Il en est de même de son poids volumique $\mu \times g$ (g, intensité de la pesanteur). La poussée d'Archimède due au liquide est égale à $\mu \times g(V - v_1)$ quand la pression est p_1 et $\mu \times g(V - v_2)$, quand la pression est p_2.

Si nous désignons par a_1 et a_2 les masses volumiques de l'air sous les pressions p_1 et p_2, la poussée d'Archimède due au gaz est $a_1 \times g \times v_1$ dans le premier cas et $a_2 \times g \times v_2$ dans le second.

La condition d'équilibre du corps solide est donc

$$P = \mu \times g(V - v_1) + a_1 \times g \times v_1 \quad \text{quand la pression est } p_1$$

et $$P = \mu \times g(V - v_2) + a_2 \times g \times v_2 \quad \text{quand la pression est } p_2.$$

Éliminons P entre ces deux équations :

$$\mu \times g(V - v_2) + a_2 \times g \times v_2 = \mu \times g(V - v_1) + a_1 \times g \times v_1.$$

Après simplification,

$$v_2(\mu - a_2) = v_1(\mu - a_1)$$

et

$$v_2 = v_1 \frac{\mu - a_1}{\mu - a_2}$$

Calculons $v_2 - v_1$:

$$v_2 - v_1 = v_1 \frac{\mu - a_1}{\mu - a_2} - v_1 \frac{\mu - a_2}{\mu - a_2},$$

$$v_2 - v_1 = v_1 \frac{a_2 - a_1}{\mu - a_2}.$$

Cette formule donne la variation de volume cherchée, si nous connaissons la masse volumique, a_2, de l'air sous la pression p_2. Le gaz suit la loi de Mariotte : sa masse volumique à température constante est proportionnelle à sa pression :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

d'où

$$a_2 = a_1 \times \frac{p_2}{p_1}.$$

a_2 est donc supérieur à a_1 et, par suite, $v_2 > v_1$: le solide émerge davantage lorsque la pression de l'air croît.

Application numérique :

$$v_1 = 151 \text{ cm}^3, \qquad a_1 = \frac{1}{770} \text{ g/cm}^3, \qquad p_1 = 1 \text{ atmosphère},$$

$$p_2 = 15 \text{ atmosphères}, \qquad \mu = 1 \text{ g/cm}^3.$$

$$a_2 = \frac{1}{770} \times \frac{15}{1},$$

$$v_2 - v_1 = 151 \times \frac{\frac{15}{770} - \frac{1}{770}}{1 - \frac{15}{770}} = \frac{151 \times 14}{755},$$

$$\mathbf{v_2 - v_1 = 2{,}8 \text{ cm}^3.}$$

47. — Conditions d'équilibre d'un piston mobile dans un cylindre rempli d'air.

Un récipient cylindrique fermé est divisé en deux compartiments par un piston mobile. Sa longueur est $2\,l = 1$ m et sa section $s = 50$ cm^2.

Au départ, le piston est au milieu du cylindre; les deux compartiments renferment de l'air à 0 °C et sous une pression de 76 cm de mercure.

1° On déplace le piston de 30 cm. Calculer en unités MKS la pression de l'air dans chaque compartiment, la température restant 0 °C.

2° Avec quelle force faut-il agir sur le piston pour le maintenir immobile?

3° Quelle masse d'air faut-il extraire de l'un des compartiments pour que le piston, rendu libre, reste en équilibre?

Masse volumique de l'air dans les conditions de l'expérience : 1,3 kg/m^3; masse volumique du mercure : 13 600 kg/m^3; intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience : $g = 9{,}81$ N/kg.

(Bacc. tech., Clermont.)

1° Le compartiment 1 renferme une masse d'air m_0 à la température 0 °C. Ce gaz occupe un volume

$$v_0 = s \times l,$$

sous la pression p_0.

On déplace le piston d'une longueur d. Le volume du gaz devient

$$v_1 = s(l + d),$$

la pression prend la valeur p_1.

La température restant constante, la loi de Mariotte est applicable :

$$p_1 \times v_1 = p_0 \times v_0,$$
$$p_1 \times s(l + d) = p_0 \times s \times l,$$

d'où nous tirons

$$(1) \quad p_1 = p_0 \times \frac{l}{l + d}.$$

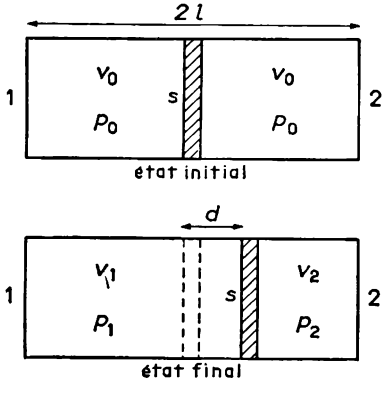


FIG. 1.

Le compartiment 2 renferme la même masse d'air m_0 à la température 0 °C.

Dans l'état initial, le volume de ce gaz est v_0 et sa pression p_0; après le déplacement du piston, le volume devient

$$v_2 = s(l - d),$$

la pression prend la valeur p_2.

La loi de Mariotte est encore applicable :

$$p_2 \times v_2 = p_0 \times v_0,$$
$$p_2 \times s(l - d) = p_0 \times s \times l,$$

d'où nous tirons

(2) $$p_2 = p_0 \times \frac{l}{l - d}.$$

Application numérique :

La pression p_0 est donnée en centimètres de mercure :

$$h_0 = 76 \text{ cm.}$$

Sa valeur, dans un système cohérent d'unités, est donnée par la formule

$$p_0 = \mu \times g \times h_0,$$

dans laquelle μ représente la masse volumique du mercure et g l'intensité de la pesanteur.

Dans le système MKS,

$$\mu = 13\,600 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9{,}81 \text{ MKS}, \quad h_0 = 0{,}76 \text{ m},$$
$$l = 50 \text{ cm, ou } 0{,}50 \text{ m}, \quad d = 30 \text{ cm, ou } 0{,}30 \text{ m}.$$

$$p_1 = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}76 \times \frac{0{,}50}{0{,}50 + 0{,}30} = 63\,372 \text{ N/m}^2,$$

$$\mathbf{p_1 = 63\,400 \text{ N/m}^2, \text{ ou pascals.}}$$

$$p_2 = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}76 \times \frac{0{,}50}{0{,}50 - 0{,}30} = 253\,490 \text{ N/m}^2,$$

$$\mathbf{p_2 = 253\,000 \text{ N/m}^2, \text{ ou pascals.}}$$

2° Les deux faces du piston sont soumises à des forces opposées normales respectivement à chaque face et de valeur différente.

L'air du compartiment 1 exerce une force

$$F_1 = p_1 \times s.$$

L'air du compartiment 2 exerce une force

$$F_2 = p_2 \times s.$$

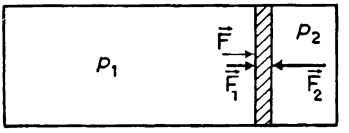


FIG. 2.

Puisque p_2 est supérieur à p_1,

$$F_2 > F_1.$$

Le piston ne peut être en équilibre sous l'action de ces deux forces. Il faut faire intervenir une troisième force F pour réaliser l'équilibre du piston.

La résultante de ces trois forces doit être nulle, F doit s'exercer dans le même sens que F_1 :

$$F + F_1 = F_2,$$
$$F = F_2 - F_1.$$
$$F = p_2 \times s - p_1 \times s,$$
$$F = (p_2 - p_1)\, s.$$

Application numérique :

$$p_1 = 63\,372 \text{ N/m}^2; \qquad p_2 = 253\,490 \text{ N/m}^2;$$
$$s = 50 \text{ cm}^2, \quad \text{ou} \quad 50 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$
$$F = (253\,490 - 63\,372) \times 50 \times 10^{-4} = 950{,}590 \text{ N},$$
$$\mathbf{F = 951 \text{ N}.}$$

3° Si l'on cesse d'exercer la force F — ce qui rend libre le piston — pour que celui-ci reste en équilibre, il faut diminuer la force F_2 de manière qu'elle devienne égale à F_1. Soient F_2' et p_2' ces nouvelles valeurs de la force et de la pression dans le compartiment 2 :

$$F_2' = F_1,$$
$$p_2' \times s = p_1 \times s.$$

Il faut donc réaliser dans le compartiment 2 une pression égale à p_1 :

$$p_2' = p_1.$$

Pour diminuer la pression sans modifier le volume, il faut extraire de l'air de ce compartiment.

Nous savons en effet qu'à température constante la masse volumique d'un gaz est proportionnelle à sa pression.

Si la masse volumique de l'air est a_0 sous la pression p_0 et a sous la pression p_1,

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p_1}{p_0},$$
$$a = a_0 \times \frac{p_1}{p_0}.$$

La masse d'air contenu dans le compartiment 2 aura pour valeur

$$m = a \times v_2,$$

d'où
$$m = a_0 \times \frac{p_1}{p_0} \times s\,(l - d).$$

Or, d'après (1),
$$\frac{p_1}{p^0} = \frac{l}{l + d}$$

et
$$m = a_0 \times s \times l \times \frac{l - d}{l + d}.$$

La masse de l'air contenu initialement dans ce compartiment était

$$m_0 = a_0 \times v_0 = a_0 \times s \times l.$$

La masse d'air que l'on doit extraire de ce compartiment est la différence de ces deux masses :

$$m_0 - m = a_0 \times s \times l - a_0 \times s \times l \times \frac{l-d}{l+d},$$

$$m_0 - m = a_0 \times s \times l \times \frac{2d}{l+d}.$$

Application numérique :

$a_0 = 1{,}3$ g/l, ou 1,3 kg/m³; $s = 50$ cm², ou 0,005 0 m²; $l = 50$ cm, ou 0,50 m; $d = 30$ cm, ou 0,30 m.

$$m_0 - m = 1{,}3 \times 0{,}005\,0 \times 0{,}50 \times \frac{2 \times 0{,}30}{0{,}50 + 0{,}30},$$

$$m_0 - m = \frac{1{,}3 \times 0{,}015}{8} = 0{,}002\,437\,5 \text{ kg}$$

$$\boldsymbol{m_0 - m = 2{,}44 \text{ g.}}$$

CHAPITRE XII

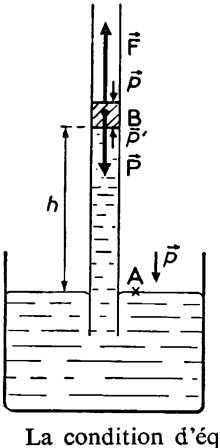
Pression atmosphérique. Baromètre.

48. — Calcul de la force exercée sur le piston d'une pompe à eau.

Un piston, de section 50 cm², se meut dans un cylindre. On soulève de l'eau, en tirant sur le piston, jusqu'à 3 m au-dessus du niveau de l'eau contenue dans un réservoir en un lieu où la pression atmosphérique est égale à 75 cm de mercure.

La masse du piston est 10 kg. Avec quelle force verticale, dirigée vers le haut, faut-il tirer sur le piston pour le maintenir en équilibre?

Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}80$ N/kg.



Soit $\vec{F}$ la force verticale, dirigée de bas en haut, que l'on doit faire agir sur le piston pour le maintenir en équilibre, lorsque l'eau est soulevée d'une hauteur h au-dessus du niveau du réservoir.

Le piston de masse M est alors soumis à l'action de quatre forces verticales concourantes :

— son poids $\vec{P} = M \times \vec{g}$,

— la force $\vec{F}$,

— la force $\vec{f}$ exercée par la pression atmosphérique, p, sur sa face supérieure d'aire S, et de module $p \times S$,

— la force $\vec{f'}$ exercée par l'eau (pression p)' sur sa face inférieure et de module $p' \times S$.

La condition d'équilibre s'obtient en écrivant que la résultante de ces quatre forces est nulle :

$$F + p'S - pS - P = 0,$$

d'où nous tirons

(1) $$F = P + (p - p')\,S.$$

La différence $p - p'$ s'obtient par application du principe général de l'hydrostatique. Dans le liquide en équilibre, la différence de pression entre les points A (pression p) et B (pression p') est

$$p - p' = \varpi \times h.$$

ϖ, poids volumique de l'eau, est égal au produit de la masse volumique, μ, par l'intensité de la pesanteur g :

$$\varpi = \mu \times g.$$

La relation (1) devient

$$F = M \times g + \mu \times g \times h \times S.$$

La force F est donc indépendante de la pression atmosphérique.

Application numérique :

$M = 10$ kg; $g = 9{,}8$ N/kg; $\mu = 1\,000$ kg/m^3; $h = 3$ m;
$S = 50$ cm^2, ou 50×10^{-4} m^2.

$F = 10 \times 9{,}8 + 1\,000 \times 9{,}8 \times 3 \times 50 \times 10^{-4}$, **F = 245 N.**

49. — Étude d'un baromètre renfermant un peu d'air.

Un baromètre à cuvette, formé d'un tube d'une section uniforme de 4 cm^2, contient dans sa chambre une petite quantité d'air.

On fait une première lecture, qui donne 748 mm pour la hauteur de la colonne de mercure et 122 mm pour la longueur de la chambre barométrique. On soulève un peu le tube et l'on trouve alors 750 mm et 141 mm. La température est 0 °C.

On demande de calculer :

1° la pression atmosphérique;

2° la masse d'air contenue dans la chambre;

Masse du litre d'air à 0 °C et sous la pression normale de 760 mm : 1,293 g.

(Bacc. tech., Poitiers, partiel.)

1° Soit x la pression atmosphérique, exprimée en centimètres de mercure. La chambre barométrique contient une masse m d'air à température constante. Dans la première position du tube, la longueur de la chambre barométrique est l et son volume

$$v = s \times l.$$

La pression p de l'air est donnée par le principe fondamental de l'hydrostatique : le plan horizontal contenant les points A et B situés le premier à l'extérieur du tube, le second à l'intérieur est une surface isobare :

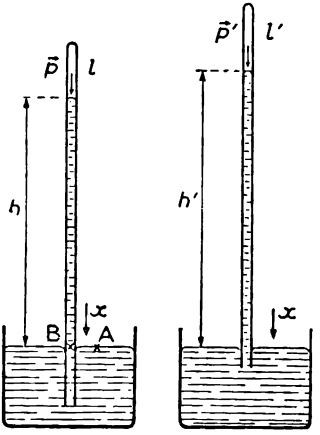
$$x = p + h,$$

d'où $$p = x - h.$$

Dans la deuxième position du tube, la longueur de la chambre barométrique est l' et son volume $v' = s \times l'$. La pression p' de l'air est telle que

$$x = p' + h',$$

d'où $$p' = x - h'.$$



La température et la masse de l'air étant constantes, la loi de Mariotte est applicable :

$$p \times v = p' \times v',$$
$$(x - h) \times s \times l = (x - h') \times s \times l',$$
$$(x - h) \times l = (x - h') \times l'.$$

De cette relation nous tirons

$$x = \frac{h'l' - hl}{l' - l}.$$

Application numérique :

$h = 748$ mm; $h' = 750$ mm; $l = 122$ mm; $l' = 141$ mm.

$$x = \frac{750 \times 141 - 748 \times 122}{141 - 122} = 762{,}8 \text{ mm de mercure.}$$

$$\boldsymbol{x = 763 \text{ mm de mercure.}}$$

2° La masse d'air contenu dans la chambre barométrique est égale au produit de sa masse volumique par son volume :

$$m = a \times v.$$

a est la masse volumique de l'air sous la pression p et à la température 0 °C correspondant à la première position du tube.

Nous pouvons calculer a en fonction de a_0, masse volumique de l'air dans les conditions normales de température et de pression (0 °C, 760 mm Hg).

En effet, d'après la loi de Mariotte, la masse volumique d'un gaz est proportionnelle à sa pression :

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p}{p_0},$$

d'où

$$a = a_0 \times \frac{p}{p_0}.$$

Le volume v étant $v = s \times l$, la masse m de l'air est donnée par l'expression

$$m = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times s \times l.$$

Application numérique :

$$a_0 = 1{,}293 \text{ g/l}, \quad \text{ou} \quad \frac{1{,}293}{1\,000} \text{ g/cm}^3;$$

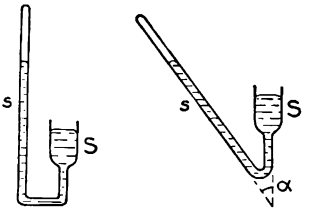
$p = x - h = 762{,}8 - 748 = 14{,}8$ mm de mercure;

$p_0 = 760$ mm de mercure; $s = 4$ cm², $l = 122$ mm, ou 12,2 cm.

$$m = \frac{1{,}293}{1\,000} \times \frac{14{,}8}{760} \times 4 \times 12{,}2 = 0{,}001\,228 \text{ g},$$

$$\boldsymbol{m = 1{,}23 \text{ mg}.}$$

50. — Étude d'un baromètre à siphon.



On considère un baromètre à siphon formé de deux tubes verticaux de sections S et s.

1° De combien s'élève le mercure dans la branche de section s lorsque la pression atmosphérique varie de 1 mm?

Application : $s = 1$ cm²; $S = 5$ cm².

2° On considère un second baromètre à siphon dont le tube de section s est incliné sur le tube vertical de section S, d'un angle α. Quel est le déplacement du mercure dans la branche inclinée lorsque la variation de pression est encore 1 mm?

Application : $s = 1$ cm²; $S = 5$ cm².

Calculer le déplacement pour $\alpha = 30°$ et pour $\alpha = 45°$.

Quelle conclusion tirez-vous des trois résultats numériques ainsi obtenus?

3° Quel doit être l'angle d'inclinaison α pour que le déplacement soit $\frac{10}{7}$ mm?

(Bac. tech. Caen, partiel.)

1° Désignons par p la pression atmosphérique, exprimée en centimètres de mercure, et par h la distance verticale des niveaux A et B du mercure dans les deux tubes (*fig.* 1). D'après le principe fondamental de l'hydrostatique, le plan horizontal contenant les points A et C situés, le premier dans le tube de section S, le second dans le tube de section s, est une surface isobare. La chambre barométrique étant vide,

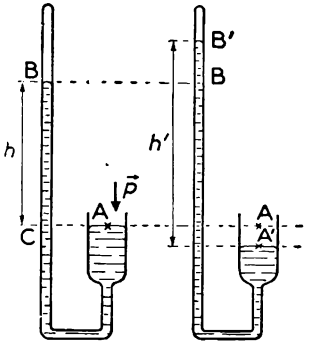


FIG. 1.

$$p = h.$$

Si la pression atmosphérique passe de la valeur p à la valeur $p' > p$, le niveau du mercure baisse dans le gros tube et s'élève dans le petit.

La distance h' des deux niveaux A' et B' est

$$h' = h + AA' + BB'$$
$$= h + AA' + x,$$

en désignant par x la distance BB' cherchée.

La différence $h' - h = AA' + x$ mesure la variation donnée, $p' - p$, de la pression atmosphérique.

Pour calculer AA′, nous écrirons que la diminution du volume du mercure dans le gros tube est égale à l'augmentation du volume du mercure dans le petit :

$$s \times x = S \times AA'.$$

Nous en tirons $$AA' = \frac{s \times x}{S}$$

et, par suite, $$h' - h = \frac{s \times x}{S} + x.$$

Cette relation permet de calculer x :

(1) $$x = (h' - h) \times \frac{S}{s + S}.$$

Application numérique :

$$p' - p = h' - h = 1 \text{ mm, ou } 0{,}1 \text{ cm de mercure,}$$

$$S = 5 \text{ cm}^2, \qquad s = 1 \text{ cm}^2.$$

$$x = 0{,}1 \times \frac{5}{1 + 5} = 0{,}083\,3 \text{ cm},$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}83 \text{ mm}.}$$

2° Si nous considérons un baromètre à branche inclinée (*fig.* 2), l'augmentation $p' - p$ de la pression atmosphérique se traduit par la même différence, $h' - h$, des distances verticales séparant les niveaux du mercure dans les deux branches; on a alors, comme précédemment,

$$h' - h = AA' + BB'' = AA' + BB' \cos\alpha = AA' + x\cos\alpha,$$

en désignant par x la distance BB′.

Pour calculer AA′ en fonction de x, écrivons l'égalité des variations de volume dans les deux branches.

La surface de base du cylindre incliné dans la branche de section s est $\frac{s}{\cos\alpha}$, la distance verticale des bases est $x \times \cos\alpha$, le volume correspondant est $s \times x$.

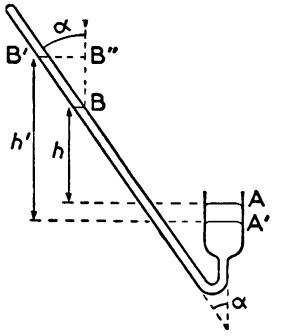


FIG. 2.

$$s \times x = S \times AA',$$

$$AA' = \frac{s \times x}{S}.$$

$$h' - h = \frac{s \times x}{S} + x \times \cos\alpha$$

$$= x \times \frac{s + S\cos\alpha}{S}.$$

Cette équation permet de calculer le déplacement x du niveau du mercure dans la branche inclinée :

(2) $$x = (h' - h) \times \frac{S}{s + S\cos\alpha}.$$

Application numérique :

$$h' - h = 0{,}1 \text{ cm}; \qquad S = 5 \text{ cm}^2; \qquad s = 1 \text{ cm}^2.$$

$$x = 0{,}1 \times \frac{5}{1 + 5\cos\alpha}.$$

$$\alpha = 30^\circ, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x = 0{,}1 \times \frac{5}{1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{4 + 10\sqrt{3}}.$$

$$x = 0{,}093\,8 \text{ cm}. \qquad \boldsymbol{x = 0{,}94 \text{ mm}.}$$

$$\alpha = 45^\circ, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = 0{,}1 \times \frac{5}{1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{4 + 10\sqrt{2}}.$$

$$x = 0{,}110 \text{ cm}. \qquad \boldsymbol{x = 1{,}10 \text{ mm}.}$$

Remarquons que la relation (2) contient la relation (1). On retrouve en effet la relation (1) quand on prend $\alpha = 0$.

Les trois résultats numériques trouvés montrent que, pour une même variation de pression, le déplacement du niveau du mercure augmente avec l'angle α. Inférieur à $h' - h$ quand l'angle α est faible, il lui devient supérieur pour une certaine valeur de α comprise entre 30° et 45°.

Ceci revient à dire qu'en inclinant la branche fermée du baromètre à siphon on augmente la sensibilité de cet appareil.

3° La formule générale (2) permet de calculer l'angle α si l'on connaît les autres grandeurs :

$$\cos\alpha = \frac{(h' - h)\,S - s \times x}{S \times x}.$$

Application numérique :

$$h' - h' = 0{,}1 \text{ cm}; \qquad S = 5 \text{ cm}^2; \qquad s = 1 \text{ cm}^2;$$

$$x = \frac{10}{7} \text{ mm}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{7} \text{ cm}.$$

$$\cos\alpha = \frac{0{,}1 \times 5 - 1 \times \frac{1}{7}}{5 \times \frac{1}{7}} = \frac{2{,}5}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \boldsymbol{\alpha = 60^\circ}.$$

51. — Équilibre d'un tube barométrique plongeant dans le mercure.

Un baromètre à mercure est constitué par un tube vertical parfaitement cylindrique, de poids P, plongeant dans le mercure d'une cuvette immobile, également cylindrique, de section intérieure S. La section intérieure du tube est s, sa section extérieure s'. Le tube est suspendu par un fil à l'un des plateaux d'une balance et ramené constamment à la même position en modifiant les poids placés sur les plateaux.

1° La hauteur barométrique est H; le tube s'enfonce dans le mercure de x cm. Calculer la force de tension, F, du fil qui soutient le tube.

2° La pression barométrique change et devient H'. Calculer les variations des niveaux du mercure dans le tube et dans la cuvette du baromètre et la variation f de la force de tension du fil.

On désignera par ϖ le poids volumique du mercure. On donnera les expressions algébriques des résultats et leurs valeurs numériques en prenant :

$s = 8$ cm², $s' = 11$ cm², $S = 150$ cm²,
$H = 75$ cm, $H' = 78$ cm, $x = 5$ cm,
$P = 6{,}86$ N, $\varpi = 133\,280$ N/m³.

(Bacc. tech., Bordeaux, partiel.)

1° La force de tension du fil qui soutient le tube barométrique est celle qui agit sur le plateau de la balance (*fig.* 1).

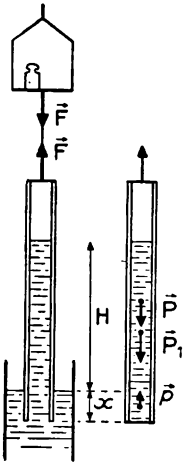


FIG. 1.

Le tube barométrique considéré seul est en équilibre sous l'action de quatre forces verticales concourantes :

— le poids $\vec{P}$ du tube de verre, appliqué au centre de gravité du tube,

— le poids $\vec{P_1}$ de la colonne de mercure contenu dans le tube de verre et de hauteur $H + x$,

— la poussée d'Archimède $\vec{p}$ exercée par le mercure sur la partie du tube immergée,

— la force $\vec{F}$ de tension du fil.

La condition d'équilibre s'obtient en écrivant que la résultante de ces quatre forces de même direction et concourantes est nulle :

$$F - P - P_1 + p = 0. \qquad (1)$$

On peut donc connaître F si l'on connaît les trois autres forces :

$$F = P + P_1 - p. \qquad (2)$$

Le poids P est une donnée du problème.

Le poids P_1 de la colonne de mercure de section s et de hauteur $H + x$ est égal à $\varpi \times s\,(H + x)$.

La poussée d'Archimède, p, sur la partie immergée du tube est égale à $\varpi \times s' \times x$. Nous pouvons en effet considérer comme immergé non seulement le verre mais le mercure qu'il contient comme si l'on avait affaire à un solide :

$$F = P + \varpi \times s\,(H + x) - \varpi \times s' \times x. \tag{3}$$

Application numérique :

$P = 6{,}86$ N; $\varpi = 133\,280$ N/m^3; $s = 8$ cm^2, ou 8×10^{-4} m^2;
$s' = 11$ cm^2, ou 11×10^{-4} m^2; $H = 75$ cm, ou $0{,}75$ m;
$x = 5$ cm, ou $0{,}05$ m.

$$F = 6{,}86 + 133\,280 \times 8 \times 10^{-4}(0{,}75 + 0{,}05) - 133\,280 \times 11 \times 10^{-4} \times 0{,}05.$$

$$F = 6{,}86 + 85{,}30 - 7{,}33 = 84{,}83 \text{ N},$$

$$\mathbf{F = 84{,}8 \text{ N}}.$$

2° A et B sont les niveaux à l'intérieur et à l'extérieur du tube barométrique quand la pression vaut H cm de mercure (*fig.* 2).

A′ et B′ sont ces mêmes niveaux quand la pression vaut H′ cm de mercure.

x' est la longueur de tube immergée dans ce dernier cas.

Les variations des niveaux du mercure dans le tube et dans la cuvette sont données par les distances

$$AA' = y \quad \text{et} \quad BB' = z.$$

Entre ces distances nous avons la relation

$$y = H' - H - z.$$

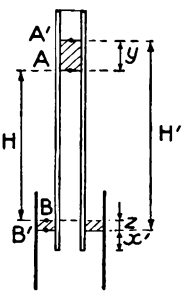


FIG. 2.

D'autre part, il est évident que la variation de volume du mercure dans la cuvette est égale à la variation de volume du mercure dans le tube :

$$(S - s')\,z = s \times y.$$

Portons la valeur de z fournie par cette équation dans la précédente :

$$y = H' - H - \frac{s}{S - s'}\,y,$$

$$y = \frac{(H' - H)(S - s')}{S - s' + s}, \tag{4}$$

$$z = \frac{s\,(H' - H)}{S - s' + s}. \tag{5}$$

Dans ces nouvelles conditions, la tension du fil soutenant le tube barométrique F′ est donnée par une équation analogue à l'équation

(2) qui exprime l'équilibre du tube sous l'action des quatre forces qui agissent sur lui : F', P qui n'a pas varié, P'_1 et p'.

$$P'_1 = \varpi \times s(H' + x'),$$

$$p' = \varpi \times s' \times x'.$$

$$F' = P + \varpi \times s\,(H' + x') - \varpi \times s' \times x'. \qquad (6)$$

La différence de ces deux tensions est $f = F' - F$,

$$f = \varpi \times s\,(H' + x' - H - x) - \varpi \times s'\,(x' - x).$$

La différence des hauteurs d'immersion étant $z = x - x'$, l'équation précédente s'écrit

$$f = \varpi \times s\,(H' - H - z) + \varpi \times s' \times z.$$

En remplaçant z par sa valeur (5) on obtient finalement

$$f = \frac{\varpi \times S \times s\,(H' - H)}{S - s' + s}.$$

Application numérique :

$H' = 78$ cm, ou 0,78 m; $H = 75$ cm, ou 0,75 m;
$S = 150$ cm², ou 150×10^{-4} m²; $s = 8$ cm², ou 8×10^{-4} m²;
$s' = 11$ cm², ou 11×10^{-4} m²; $\varpi = 133\,280$ N/m³.

$$y = \frac{(0{,}78 - 0{,}75)\,(150 - 11) \times 10^{-4}}{(150 - 11 + 8) \times 10^{-4}} = \frac{0{,}03 \times 139}{147} = 0{,}028\,3 \text{ m},$$

$$\boldsymbol{y = 2{,}83 \text{ cm}.}$$

$$z = \frac{8 \times 10^{-4}\,(0{,}78 - 0{,}75)}{(150 - 11 + 8) \times 10^{-4}} = \frac{0{,}24}{147} = 0{,}001\,63 \text{ m},$$

$$\boldsymbol{z = 0{,}163 \text{ cm}.}$$

$$= \frac{133\,280 \times 150 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^{-4}\,(0{,}78 - 0{,}75)}{(150 - 11 + 8) \times 10^{-4}} = \frac{479{,}808}{147},$$

$$\boldsymbol{f = 3{,}27 \text{ N}.}$$

CHAPITRE XIII

Manomètres.

52. — Manomètre à mercure de Cailletet.

1° La branche d'un manomètre à air libre, qui est au contact de l'atmosphère, a une hauteur de 300 m (hauteur de la tour Eiffel); la branche au contact du gaz dont on veut connaître la pression s'arrête au niveau du sol. Quelle est la plus grande pression que permet de mesurer cet instrument?

On donne :

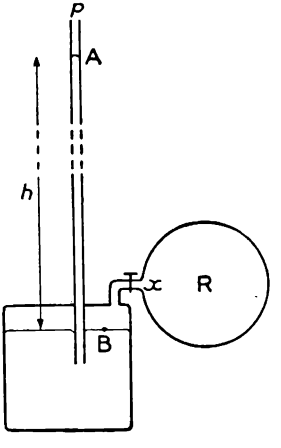
masse volumique du mercure : $\mu = 13\,600$ kg/m^3,

intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81$ N/kg,

pression atmosphérique au sommet de la tour : $p = 9{,}81 \times 10^4$ pascals.

2° On fait les mesures avec une précision de $\frac{1}{200}$. A partir de quelle valeur de la pression peut-on négliger la pression atmosphérique?

1° La plus grande pression que permet de mesurer cet instrument, réalisé par Cailletet, est celle qui correspond à une colonne de mercure de hauteur h égale à celle de la tour. Nous pouvons supposer que cette pression est celle d'un gaz contenu dans un récipient R.



Désignons par x cette pression et par p la pression atmosphérique au sommet de la tour.

D'après le principe fondamental de l'hydrostatique, la différence de pression entre le point B situé à la surface du mercure de la cuvette et le point A situé à la surface du liquide contenu dans le tube est donnée par l'expression

$$p_B - p_A = \mu \times g \times h,$$

μ désignant la masse volumique du mercure et g l'intensité de la pesanteur.

Or $p_A = p$ et $p_B = x$;

par suite $x - p = \mu \times g \times h$.

Cette dernière relation donne x : $x = p + \mu \times g \times h$.

Application numérique :

$$p = 9{,}81 \times 10^4 \text{ N/m}^2, \text{ ou pascals,}$$

$$\mu = 13\,600 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9{,}81 \text{ N/kg}, \quad h = 300 \text{ m.}$$

$$x = 9{,}81 \times 10^4 + 13\,600 \times 9{,}81 \times 300,$$

$$x = 9{,}81 \times 10^4 (1 + 408) = 9{,}81 \times 10^4 \times 409 = 4\,012 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$\boldsymbol{x = 4\,010 \times 10^4 \text{ N/m}^2, \text{ ou pascals.}}$$

2° Si nous négligeons la pression atmosphérique, nous commettons sur la pression x une erreur absolue de $9{,}81 \times 10^4$ pascals et une erreur relative de $\frac{9{,}81 \times 10^4}{x}$. Or nous faisons les mesures avec une précision de $\frac{1}{200}$. Nous pouvons négliger la pression atmosphérique à partir d'une valeur x donnée par la relation

$$\frac{9{,}81 \times 10^4}{x} = \frac{1}{200},$$

$$\boldsymbol{x = 1\,960 \times 10^4 \text{ pascals.}}$$

53. — Manomètre à deux liquides.

1° Un tube de verre en U dont les branches sont très longues, verticales et ont pour section 1 cm² est ouvert aux deux extrémités et contient de l'eau. On verse d'un côté 5 cm³ d'huile, qui surnage. On constate que la différence de niveau des surfaces est 7,5 mm. Quelle est la densité de l'huile?

2° On fait arriver du gaz d'éclairage au-dessus de l'huile par un tuyau de caoutchouc ajusté sur l'une des extrémités du tube. La surface de séparation eau-huile se déplace dans la même branche verticale de 10 cm. Quel est en centimètres de mercure l'excès de pression du gaz sur la pression atmosphérique?

Poids volumique de l'eau : 9 800 N/m³.

Poids volumique du mercure : 133 280 N/m³.

(Bacc. Paris, partiel.)

1° Les points A, B et C appartiennent respectivement à la surface libre de l'huile, à la surface libre de l'eau et à la surface de séparation des deux liquides (*fig.* 1).

D'après le principe fondamental de l'hydrostatique la différence de pression entre les points A et C situés dans l'huile est

$$p_C - p_A = \varpi \times h.$$

La différence de pression entre les points B et C situés dans l'eau est

$$p_C - p_B = \varpi' \times h'.$$

Les deux branches du tube en U étant ouvertes à l'air libre la pression qui s'exerce en A est la même que celle qui s'exerce en B (pression atmosphérique) :

$$p_A = p_B;$$

donc $$p_C - p_A = p_C - p_B,$$

ou $$\varpi \times h = \varpi' \times h'.$$

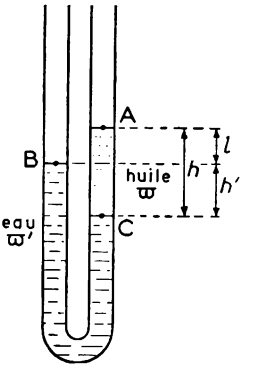


FIG. 1.

La différence de niveau des surfaces libres étant l,

$$h' = h - l.$$

Par suite,

$$\varpi \times h = \varpi' \times (h - l)$$

et $$\frac{\varpi}{\varpi'} = \frac{h-l}{h}.$$

Le rapport $\frac{\varpi}{\varpi'}$ des poids volumiques de l'huile et de l'eau n'est autre que la densité d de l'huile par rapport à l'eau :

$$d = \frac{h-l}{h}.$$

Application numérique :

$h = 5$ cm, $l = 7{,}5$ mm, ou 0,75 cm,

$$d = \frac{5 - 0{,}75}{5} = \frac{4{,}25}{5},$$

$$\boldsymbol{d = 0{,}85.}$$

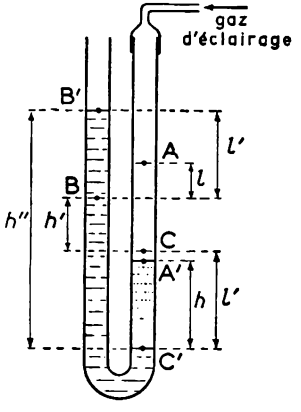


FIG. 2.

2° La branche du tube en U contenant de l'huile étant reliée à la canalisation de gaz d'éclairage et l'autre branche étant ouverte à l'air libre, les niveaux de l'huile, de l'eau et de leur surface de séparation se situent en A', B' et C'. Ils sont déplacés par rapport aux précédents de la même quantité, l'.

D'après le principe fondamental de l'hydrostatique, les différences de pression entre C' et A' et entre C' et B' sont respectivement (*fig.* 2) :

$$p_{C'} - p_{A'} = \varpi \times h,$$

$$p_{C'} - p_{B'} = \varpi' \times h''.$$

Retranchons membre à membre ces égalités :

$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi' \times h'' - \varpi \times h.$$

Calculons h'' :

$$h'' = h' + CC' + BB' = h' + l' + l',$$
$$h'' = h' + 2\,l',$$
$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi'(h' + 2\,l') - \varpi \times h,$$
$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi' \times h' + \varpi' \times 2\,l' - \varpi \times h.$$

Dans la première question nous avons trouvé la relation

$$\varpi' h' = \varpi \times h.$$

La différence de pression, $p_{A'} - p_{B'}$, qui mesure l'excès de pression du gaz d'éclairage sur la pression atmosphérique prend la forme simple

$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi' \times 2\,l'.$$

Si nous voulons traduire cette pression en centimètres de mercure il faudra écrire

$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi_1 \times h_1,$$

ϖ_1 étant le poids volumique du mercure et h_1 la différence de niveau du mercure dans un tube en U utilisant uniquement du mercure comme liquide manométrique.

La double égalité

$$p_{A'} - p_{B'} = \varpi' \times 2\,l' = \varpi_1 \times h_1$$

permet de calculer h_1 :

$$h_1 = \frac{\varpi' \times 2\,l'}{\varpi_1}.$$

Application numérique :

$$\varpi' = 9\,800 \text{ N/m}^3; \quad \varpi_1 = 133\,280 \text{ N/m}^3;$$
$$l' = 10 \text{ cm, ou } 0{,}10 \text{ m.}$$
$$h_1 = \frac{9\,800 \times 2 \times 0{,}10}{133\,280} = 0{,}014\,7 \text{ m.}$$

L'excès de pression $\Delta p = p_{A'} - p_{B'} = \varpi_1 \times h_1$ est exprimé en pascals. Pour l'exprimer en centimètres de mercure on traduira en centimètres la valeur de h_1 :

Δp = 1,47 cm de mercure.

54. — Manomètre à grande sensibilité.

Un long tube, de section s, recourbé en forme d'U, vertical, met en communication deux vases, A_1 et A_2, de même section S. Le vase de droite, A_1, est rempli d'un liquide de densité d_1; le vase de gauche, A_2, contient un liquide de densité d_2. Les deux liquides n'étant pas miscibles viennent en contact en X dans la branche de gauche du tube en U.

1° Écrire la condition d'équilibre lorsque, les vases A_1 et A_2 étant tous deux ouverts à la partie supérieure, la pression au-dessus des liquides qu'ils contiennent est égale à la pression atmosphérique p_0.

2° Calculer le déplacement vertical x de la surface de séparation X lorsque les pressions exercées sur les liquides dans les vases A_1 et A_2 deviennent respectivement p et p_0.

Application : $d_1 = 1{,}027$, $d_2 = 1$, $\frac{s}{S} = \frac{1}{500}$, $p - p_0 = 98$ pascals; poids volumique de l'eau : $\varpi_0 = 9\,800$ N/m³.

3° Donner la dénivellation x' fournie, dans les mêmes conditions, par un manomètre ordinaire à eau et en déduire l'augmentation de sensibilite qu'a permis de réaliser le dispositif précédent. *(Bacc., Dijon.)*

1° La condition d'équilibre des deux liquides non miscibles s'obtient par application du principe fondamental de l'hydrostatique.

Considérons les deux points M_1 et N du liquide de densité d_1, ou de poids volumique $\varpi_0 \times d_1$ (*fig.* 1).

La différence de pression entre ces deux points est, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique,

$$p_N - p_{M_1} = \varpi_0 \times d_1 \times h_1.$$

De même, si nous prenons deux points M_2 et N du liquide de densité d_2, ou de poids volumique $\varpi_0 \times d_2$, la différence de pression entre ces deux points est

$$p_N - p_{M_2} = \varpi_0 \times d_2 \times h_2.$$

La pression en M_1 et M_2 est la même :

$$p_{M_1} = p_{M_2} = p_0.$$

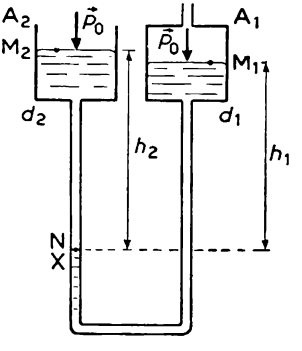


FIG. 1.

La pression en N est aussi la même, que l'on considère ce point dans le liquide de densité d_1 ou dans le liquide de densité d_2 :

$$p_N = p_0 + \varpi_0 \times d_1 \times h_1 = p_0 + \varpi_0 \times d_2 \times h_2.$$

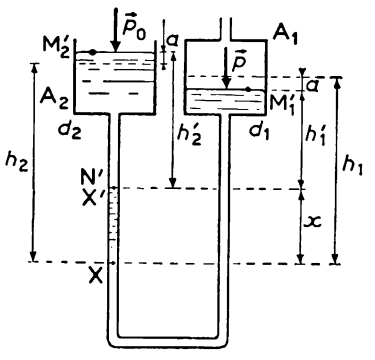


FIG. 2.

La condition d'équilibre se réduit, dans ce cas, à l'expression très simple

(1) $d_1 \times h_1 = d_2 \times h_2$.

2° Le principe fondamental de l'hydrostatique appliqué aux deux liquides permet d'écrire les deux relations suivantes (*fig.* 2) :

$$p_{N'} - p_{M'_1} = \varpi_0 \times d_1 \times h'_1,$$
$$p_{N'} - p_{M'_2} = \varpi_0 \times d_2 \times h'_2.$$

La pression en N' a la même valeur dans les deux cas; en posant $p_{M'_1} = p$, $p_{M'_2} = p_0$, la condition d'équilibre s'écrit :

(2) $$p + \varpi_0 \times d_1 \times h'_1 = p_0 + \varpi_0 \times d_2 \times h'_2.$$

Exprimons h'_1 et h'_2 en fonction de x :

$$h_1 = h'_1 + x + a,$$
$$h_2 = h'_2 + x - a;$$

a représente la variation du niveau dans chacun des vases A_1 et A_2. Il est évident que la variation de volume dans A_1 ou A_2 est égale à la variation de volume dans le tube en U.

$$S \times a = s \times x,$$

$$h'_1 = h_1 - x - \frac{s}{S} \times x,$$

$$h'_2 = h_2 - x + \frac{s}{S} \times x.$$

La condition d'équilibre (2) peut s'écrire

$$p + \varpi_0 \times d_1\left(h_1 - x - \frac{s}{S} \times x\right) = p_0 + \varpi_0 \times d_2\left(h_2 - x + \frac{s}{S} \times x\right),$$

ou

$$\frac{p - p_0}{\varpi_0} = d_2 \times h_2 - d_2 \times x + d_2 \times \frac{s}{S} \times x - d_1 \times h_1 + d_1 \times x + d_1 \times \frac{s}{S} \times x.$$

La relation (1) permet de simplifier cette expression :

$$\frac{p - p_0}{\varpi_0} = \left[d_1 - d_2 + (d_1 + d_2) \times \frac{s}{S}\right] x.$$

On peut alors calculer x :

$$x = \frac{p - p_0}{\varpi_0 \left[d_1 - d_2 + (d_1 + d_2)\frac{s}{S} \right]}.$$

Application numérique :

$$p - p_0 = 98 \text{ pascals}; \qquad \varpi_0 = 9\,800 \text{ N/m}^3.$$

$$d_1 = 1{,}027; \qquad d_2 = 1; \qquad \frac{s}{S} = \frac{1}{500} = 0{,}002.$$

$$x = \frac{98}{9\,800[1{,}027 - 1 + (1{,}027 + 1) \times 0{,}002]}.$$

$$x = \frac{1}{2{,}7 + 0{,}405\,4} = \frac{1}{3{,}105\,4} = 0{,}322 \text{ m},$$

$$\mathbf{x = 32{,}2 \text{ cm}.}$$

3° Dans un manomètre ordinaire à eau (*fig.* 3), A et B étant deux points de la surface libre, le principe fondamental de l'hydrostatique permet d'écrire

$$p_A - p_B = \varpi_0 \times x'.$$

Si $p_A = p$ et $p_B = p_0$,

$$x' = \frac{p - p_0}{\varpi_0}.$$

Si $p - p_0 = 98$ pascals et $\varpi_0 = 9\,800$ N/m³,

$x' = 0{,}01$ m, soit $\mathbf{x' = 1 \text{ cm}.}$

Le dispositif précédent donne pour la même différence de pression une dénivellation $x = 32{,}2$ cm; il est donc environ 32 fois plus sensible.

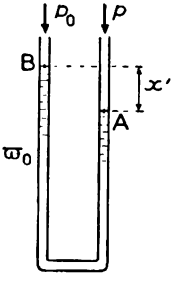


FIG. 3

CHAPITRE XIV

Thermomètre.

55. — Correction du point 100 d'un thermomètre à mercure.

Un thermomètre a été gradué un jour où la pression atmosphérique atteignait 762,9 mm de mercure. Par ailleurs, le manomètre communiquant avec l'étuve utilisée dans la détermination du point 100, accusait une surpression équivalant à 3,4 cm d'eau.

1° Quelle était la température réelle de la vapeur d'eau au moment de l'expérience?

On admet que, si la pression de la vapeur, évaluée en millimètres de mercure, est H, la température exacte d'ébullition de l'eau est donnée par la formule

$$t = 100 + \frac{H - 760}{27}.$$

2° Quelle est, sur la tige, la distance de deux points correspondant à une différence de température de 1 °C?

La distance des traits correspondant aux deux points fixes a été trouvée égale à 205,4 mm.

Densité du mercure : $d = 13{,}6$.

1° Soit H_0 la pression atmosphérique (exprimée en millimètres de mercure) au moment de l'expérience.

La surpression de la vapeur d'eau dans l'étuve équivaut à h millimètres d'eau.

Si ϖ et ϖ' désignent les poids volumiques de l'eau et du mercure, la valeur h' de cette surpression, évaluée en millimètres de mercure sera telle que

$$\varpi' \times h' = \varpi \times h,$$

d'où

$$h' = \frac{\varpi}{\varpi'} \times h.$$

La densité d du mercure est, par définition, le rapport du poids volumique ϖ' du mercure au poids volumique ϖ de l'eau :

$$d = \frac{\varpi'}{\varpi},$$

d'où

$$h' = \frac{h}{d}.$$

La pression de la vapeur d'eau dans l'étuve est donc

$$H = H_0 + h' = H_0 + \frac{h}{d}.$$

La température exacte d'ébullition de l'eau est

$$t = 100 + \frac{H_0 + \frac{h}{d} - 760}{27}.$$

Application numérique :

$H_0 = 762{,}9$ mm de mercure; $h = 3{,}4$ cm, ou 34 mm; $d = 13{,}6$.

$$t = 100 + \frac{762{,}9 + \frac{34}{13{,}6} - 760}{27},$$

$$t = 100 + \frac{762{,}9 + 2{,}5 - 760}{27},$$

$$\boldsymbol{t = 100{,}2\ ^\circ C.}$$

C'est cette température que nous devons noter sur la tige du thermomètre, au lieu de 100 °C.

2° La distance des traits correspondant aux deux points fixes étant égale à L et la différence de température correspondante étant égale à t °C, la distance l de deux points correspondant à une différence de température de 1 °C est

$$l = \frac{L}{t},$$

Numériquement :

$$L = 205{,}4 \text{ mm}, \qquad t = 100{,}2\ ^\circ C.$$

$$l = \frac{205{,}4}{100{,}2} = 2{,}049\,9 \text{ mm},$$

soit

$$\boldsymbol{l = 2{,}05 \text{ mm}.}$$

Les graduations du thermomètre doivent être distantes de 2,05 mm. On peut les graver avec une machine à diviser.

56. — Comparaison des échelles centésimale et Fahrenheit.

Dans l'échelle Fahrenheit, utilisée en Angleterre et en Amérique, les traits correspondant aux températures 0 et 100 de l'échelle centésimale portent respectivement les indications 32 et 212.

1° Calculer la température centésimale t correspondant à la température $t' = 77$ évaluée en degrés Fahrenheit (°F).

2° Calculer la température Fahrenheit t' correspondant à la température $t = -10$ °C.

3° A quelle température les deux thermomètres gradués selon les échelles centésimale et Fahrenheit donnent-ils la même indication?

Pour résoudre les trois questions du problème, il suffit de connaître la relation générale existant entre la température t évaluée en °C et la même température t' évaluée en °F.

D'après la définition même des deux échelles,

$$100\ ^\circ\text{C équivalent à } 212 - 32 = 180\ ^\circ\text{F},$$

$$t\ ^\circ\text{C équivalent à } \frac{180}{100} \times t\ ^\circ\text{F}, \quad \text{soit} \quad 1{,}8\ t\ ^\circ\text{F}.$$

Le zéro de l'échelle centésimale correspondant à la température 32 de l'échelle Fahrenheit, la température t' °F correspondant à la température t °C est

$$t' = 32 + 1{,}8\ t.$$

1° Si $t' = +77$ °F, la température t est donnée par l'équation

$$77 = 32 + 1{,}8\ t,$$

d'où $$t = \frac{77 - 32}{1{,}8}, \qquad \boldsymbol{t = +25\ ^\circ\text{C}}.$$

2° Si $t = -10$ °C, la température t' est donnée par l'équation

$$t' = 32 + 1{,}8(-10) = 32 - 18, \qquad \boldsymbol{t' = +14\ ^\circ\text{F}}.$$

3° La température x pour laquelle $t = t' = x$ est donnée par l'équation

$$x = 32 + 1{,}8\ x,$$

$$0{,}8\ x = -32, \qquad \boldsymbol{x = -40\ ^\circ\text{C}}.$$

57. — Construction d'un thermomètre à mercure.

On construit un thermomètre à mercure avec un tube de verre cylindrique gradué, de longueur utile 27 cm et de section intérieure 0,05 mm² (mesures ramenées à 0 °C).

On veut qu'il indique les températures comprises entre 0 °C et 180 °C.

1° Quel doit être le volume du réservoir à 0 °C?

2° Quelle masse de mercure mettra-t-on dans l'appareil?

3° Quelle variation de température pourra-t-on apprécier, en admettant que l'on puisse lire facilement le demi-millimètre?

Masse volumique du mercure à 0 °C : 13 600 kg/m³.

Coefficient de dilatation apparente du mercure : $\frac{1}{6\,400}$.

(Bacc., Lille.)

Rappelons d'abord comment l'on définit une échelle de température à l'aide du thermomètre à mercure.

Par définition, les variations de la température sont proportionnelles aux variations du volume apparent du mercure dans le tube thermométrique.

Dans l'échelle centésimale ou Celsius, on choisit deux points fixes :

— le point zéro, qui est la température de la glace fondante et qui correspond à un volume apparent V_0 du mercure;

— le point 100, qui est la température de l'eau bouillante sous la pression atmosphérique normale et qui correspond à un volume apparent V_{100} du mercure.

A un volume apparent V du mercure correspond une température t définie par la relation

$$\frac{t}{100} = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0}.$$

La relation précédente peut s'écrire

$$V = V_0 + \frac{V_{100} - V_0}{100} t,$$

ou

$$V = V_0\left(1 + \frac{V_{100} - V_0}{100\,V_0} t\right).$$

Posons $c = \frac{V_{100} - V_0}{100\,V_0}$. Cette relation prend la forme

(1) $$V = V_0(1 + ct).$$

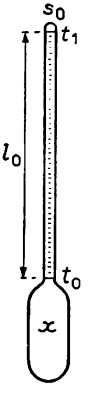
La constante c est, par définition, le coefficient de dilatation apparente du mercure.

La valeur numérique de ce coefficient dépend des propriétés du mercure, qui sont constantes, et de celles du verre qui varient d'un échantillon à l'autre. Le coefficient c dépend donc du thermomètre considéré. Pratiquement, on peut considérer c comme constant. Sa valeur moyenne est $c = \frac{1}{6\,400}$.

1° Le tube thermométrique a une section s_0 et une longueur l_0 à 0 °C. Soit x le volume du réservoir à 0 °C.

Le volume apparent V_0 du mercure à la température $t_0 = 0$ °C est égal au volume du réservoir :

$$V_0 = x.$$



Le volume apparent V du mercure à la température $t_1 = 180$ °C est

$$V = x + l_0 \times s_0.$$

Entre V et V_0, nous avons la relation

(1) $$V = V_0(1 + ct_1),$$

ou $$x + l_0 \times s_0 = x(1 + ct_1),$$

d'où nous tirons

(2) $$x = \frac{l_0 \times s_0}{ct_1}.$$

Application numérique :

$l_0 = 27$ cm, $s_0 = 0{,}05$ mm², ou $0{,}000\,5$ cm²,

$$c = \frac{1}{6\,400}, \qquad t_1 = 180 \text{ °C}.$$

$$x = \frac{27 \times 0{,}000\,5}{\frac{1}{6\,400} \times 180} = 6\,400 \times \frac{27 \times 0{,}000\,5}{180},$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}48 \text{ cm}^3}.$$

Remarque. — L'expression (2) peut s'écrire ainsi :

$$x = \frac{1}{c} \times \frac{l_0 \times s_0}{t_1} = 6\,400 \frac{l_0 \times s_0}{t_1}.$$

Nous voyons que le volume du réservoir à 0 °C est égal à 6 400 fois le volume de la fraction du tube correspondant à 1 °C. Ce résultat est valable pour tous les thermomètres à mercure.

2° La masse m de mercure qu'on devra mettre dans l'appareil doit occuper le volume x à 0 °C. Si μ_0 est la masse volumique du mercure à 0 °C, nous avons

$$m = \mu_0 \times V_0.$$

Application numérique :

$$\mu_0 = 13\,600 \text{ kg/m}^3, \quad x = 0{,}48 \text{ cm}^3, \text{ ou } 0{,}48 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

$$m = 13\,600 \times 0{,}48 \times 10^{-6} = 0{,}006\,528 \text{ kg}.$$

$$\boldsymbol{m = 6{,}53 \text{ g}.}$$

3° La plus petite variation de température Δt que l'on puisse apprécier représente, par définition, la sensibilité de l'appareil. Elle correspond à la plus petite variation de longueur Δl que l'on puisse lire sur la tige.

En négligeant la dilatation linéaire de cette dernière, la longueur l_0 correspond à un nombre t_1 de degrés. La longueur de la colonne mercurielle, comptée à partir de 0 °C, étant proportionnelle à la température, nous pouvons écrire

$$\frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{t_1}{l_0},$$

d'où

$$\Delta t = t_1 \times \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Application numérique :

$$t_1 = 180 \text{ °C}, \quad l_0 = 27 \text{ cm}, \quad \Delta l = 0{,}5 \text{ mm, ou } 0{,}05 \text{ cm},$$

$$\Delta t = 180 \times \frac{0{,}05}{27} = \frac{1}{3}.$$

$$\boldsymbol{\Delta t = 0{,}333 \text{ °C}.}$$

CHAPITRE XV

Dilatation des solides.

58. — Dilatation d'un pont métallique.

Un pont métallique a 120 mètres de longueur à la température de 15 °C. Calculer la variation de longueur qu'il subit lorsqu'il passe de la température — 20 °C (hiver) à la température + 40 °C (été).

Coefficient de dilatation linéaire du fer :

$$\lambda = 1{,}2 \times 10^{-5}.$$

(Bacc. Besançon.)

Soit l_0 la longueur du pont à 0 °C.
Sa longueur à la température $t = 15$ °C est

$$l = l_0 (1 + \lambda t).$$

Sa longueur à la température $t' = -20$ °C est

$$l' = l_0 (1 + \lambda t').$$

Enfin sa longueur à la température $t'' = +40$ °C est

$$l'' = l_0 (1 + \lambda t'').$$

Nous tirons de ces relations

$$\frac{l'}{l} = \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t} \quad \text{et} \quad \frac{l''}{l} = \frac{1 + \lambda t''}{1 + \lambda t},$$

d'où

$$\frac{l'' - l'}{l} = \frac{(1 + \lambda t'') - (1 + \lambda t')}{(1 + \lambda t)}.$$

$$l'' - l' = l \times \frac{\lambda (t'' - t')}{1 + \lambda t}.$$

Application numérique :

$l = 120$ m, $t = 15$ °C, $t' = -20$ °C, $t'' = +40$ °C, $\lambda = 1{,}2 \times 10^{-5}$.

$$l'' - l' = 120 \times \frac{1{,}2 \times 10^{-5} \ (40 + 20)}{1 + 1{,}2 \times 10^{-5} \times 15},$$

$$l'' - l' = \frac{0{,}086\,4}{1{,}000\,18} \approx 0{,}086\,4 \text{ m},$$

$$\boldsymbol{l'' - l' = 8{,}64 \text{ cm}.}$$

59. — Cerclage d'une roue de bois.

Une roue de bois mesure 1,50 m de diamètre. Un forgeron veut l'entourer d'un cercle de fer dont le diamètre intérieur est égal à 1,495 m à 20 °C. A quelle température doit-il chauffer ce cercle pour qu'il s'adapte exactement sur la roue? Coefficient de dilatation linéaire du fer : $\lambda = 1{,}2 \times 10^{-5}$.

Soit l_0 la longueur du cercle de fer et $d_0 = \frac{l_0}{\pi}$ son diamètre à la température de 0 °C.

A la température $t = 20$ °C, sa longueur est devenue

$$l = l_0(1 + \lambda t);$$

son diamètre est

$$d = \frac{l}{\pi} = \frac{l_0}{\pi}(1 + \lambda t),$$

(1) ou $$d = d_0(1 + \lambda t).$$

A la température inconnue t', le diamètre du cercle est égal à celui, d', de la roue de bois :

(2) $$d' = d_0(1 + \lambda t').$$

Divisons membre à membre les expressions (1) et (2) :

$$\frac{d'}{d} = \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t}.$$

Résolvons par rapport à t'

$$1 + \lambda t' = \frac{d'}{d}(1 + \lambda t)$$

et $$t' = \frac{d' - d + \lambda t \times d'}{\lambda d}.$$

Application numérique :

$d' = 1{,}50$ m, $d = 1{,}495$ m, $\lambda = 1{,}2 \times 10^{-5}$, $t = 20$ °C.

$$t' = \frac{1{,}50 - 1{,}495 + 1{,}2 \times 10^{-5} \times 20 \times 1{,}50}{1{,}2 \times 10^{-5} \times 1{,}495} = \frac{0{,}005\,36}{0{,}000\,017\,94} = 298{,}8\ ^\circ\text{C},$$

$$t' \approx 299\ ^\circ\text{C}.$$

Remarque. — La formule (1) montre que le diamètre du cercle de fer se dilate comme celui d'un disque plein de même métal.

60. — Coefficient de dilatation superficielle d'un solide.

Définir le coefficient de dilatation superficielle σ d'un solide. Tirer de cette définition l'expression de la surface S d'un solide à t °C en fonction de sa surface S_0 à 0 °C.

Montrer que $\sigma = 2\lambda$.

Application numérique :

Une plaque rectangulaire de zinc mesure 0,80 mètre sur 0,60 mètre à 0 °C. Calculer de combien a varié sa surface à 40 °C.

Coefficient de dilatation linéaire du zinc : $\lambda = 3 \times 10^{-5}$.

On appelle coefficient moyen de dilatation superficielle d'un solide entre 0 °C et t °C la variation de surface que subit en moyenne l'unité de surface de ce solide quand sa température varie de 1 °C.

Si S_0 désigne l'aire de la surface du solide à 0 °C, S l'aire de cette surface à t °C, le coefficient moyen de dilatation superficielle du solide est défini par l'expression

$$\sigma = \frac{S - S_0}{S_0 \times t}.$$

La surface S du solide à t °C a pour expression, en fonction de sa surface S_0 à 0 °C,

$$S = S_0(1 + \sigma t). \qquad (1)$$

Supposons que ce solide soit un carré de côté l_0 à 0 °C. A t °C, la longueur du côté sera

$$l = l_0(1 + \lambda t).$$

Les aires des surfaces S et S_0 seront

$$S_0 = l_0^2,$$

$$S = l_0^2(1 + \lambda t)^2 = S_0(1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2).$$

$\lambda^2 t^2$ est le carré du nombre λt, très petit devant 1. Nous pouvons négliger ce terme et écrire

$$S \approx S_0(1 + 2\lambda t). \qquad (2)$$

En comparant les expressions (1) et (2) nous en déduisons

$$\sigma = 2\lambda.$$

La variation de surface de la plaque est

$$S - S_0 = S_0 \times 2\lambda t.$$

Application numérique :

$$S_0 = 0{,}80 \times 0{,}60 = 0{,}48 \text{ m}^2; \qquad t = 40 \text{ °C}; \qquad \lambda = 3 \times 10^{-5}.$$

$$S - S_0 = 0{,}48 \times 2 \times 3 \times 10^{-5} \times 40$$

$$S - S_0 = 0{,}48 \times 240 \times 10^{-5} = 0{,}001\,152 \text{ m}^2,$$

$$\mathbf{S - S_0 = 11{,}5 \text{ cm}^2.}$$

61. — Mesure du coefficient de dilatation de l'aluminium. Étude de la dilatation d'un fil de ce métal.

1° Deux traits tracés sur une barre d'aluminium sont séparés, à 0 °C, par une distance de 150 mm et, à 200 °C, par une distance de 150,73 mm. Calculer le coefficient de dilatation linéaire et le coefficient de dilation cubique du métal.

2° Sur une tige de fer horizontale, on fixe en deux points A et B, distants de 10 cm à 0 °C, un fil d'aluminium qui, à 0 °C, s'applique exactement sur la tige. Au milieu, M, du fil d'aluminium, on attache un fil de coton qui passe sur une poulie de 2 mm de diamètre et qui porte un poids tenseur à son autre extrémité.

Quel déplacement subit le point M lorsque la température passe : *a*) de 0 °C à 1 °C; *b*) de 20 °C à 21 °C? De quel angle tourne la poulie dans les deux cas?

Coefficient de dilatation linéaire du fer : 0,000 011.

Dans l'expression des dilatations, les termes contenant le carré du coefficient de dilatation pourront être négligés.

(Bacc. tech., Lyon.)

1° Désignons par l_0 la distance des deux traits sur la barre d'aluminium à 0 °C et par l leur distance à t °C.

Le coefficient de dilatation linéaire moyen du métal entre les deux températures 0 °C et t °C est la variation de longueur de l'unité de longueur pour une variation de température de 1 °C :

$$\lambda = \frac{l - l_0}{l_0 \times t}.$$

Désignons par v_0 et v les volumes du métal à 0 °C et à t °C. Le coefficient de dilatation cubique moyen du métal entre les deux températures 0 °C et t °C est la variation de volume de l'unité de volume pour une variation de température de 1 °C :

$$k = \frac{v - v_0}{v_0 \times t}.$$

Si le métal a une forme cubique d'arête l_0 à 0 °C, cette arête aura pour longueur à t °C :

$$l = l_0(1 + \lambda t).$$

Les volumes v_0 et v de ce cube vaudront

$$v_0 = l_0^3,$$

$$v = l_0^3(1 + \lambda t)^3 \approx l_0^3(1 + 3\lambda t),$$

en négligeant devant 1 les termes contenant le carré et le cube de λ. Exprimons k :

$$k = \frac{l_0^3(1 + 3\lambda t) - l_0^3}{l_0^3 \times t},$$

soit

$$k = 3\lambda.$$

Application numérique :

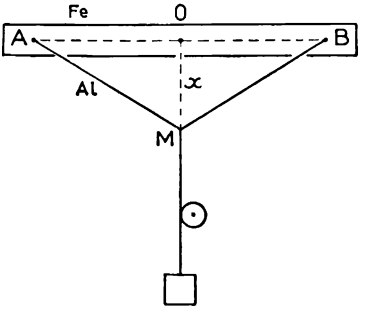
$$l_0 = 150{,}00 \text{ mm}, \qquad l = 150{,}73 \text{ mm}, \qquad t = 200 \text{ °C}.$$

$$\lambda = \frac{150{,}73 - 150{,}00}{150{,}00 \times 200} = \frac{0{,}73}{30\,000} = \frac{73}{3} \times 10^{-6},$$

$$\lambda = \mathbf{24{,}3 \times 10^{-6}},$$

$$\boldsymbol{k = 73 \times 10^{-6}}.$$

2° A 0 °C, la tige de fer et le fil d'aluminium ont la même longueur, l_0.



A t^0 C, la tige de fer a pour longueur

$$AB = l_0(1 + \lambda_1 t),$$

λ_1 désignant le coefficient de dilatation linéaire du fer.

A cette même température t °C, le fil d'aluminium a pour longueur

$$AMB = l_0(1 + \lambda t),$$

λ étant le coefficient de dilatation linéaire de l'aluminium.

La position du point M milieu du fil d'aluminium à t °C est définie par la longueur $OM = x$:

$$\overline{OM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{OA}^2,$$

$$x^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 (1 + \lambda t)^2 - \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 (1 + \lambda_1 t)^2,$$

$$x^2 = \frac{l_0^2}{4}[2(\lambda - \lambda_1)\, t + \lambda^2 t^2 - \lambda_1^2 t^2] \approx \frac{l_0^2}{2}(\lambda - \lambda_1)\, t,$$

en négligeant les termes en λ^2 et λ_1^2.

Nous en déduisons la valeur de x :

$$(1) \qquad x = l_0 \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_1}{2} \times t}.$$

Cette expression permet de calculer les deux déplacements demandés : $x_1 - x_0$, pour la variation de 0 °C à 1 °C de la température et $x_{21} - x_{20}$ pour la variation de 20 °C à 21 °C.

Les angles de rotation correspondants de la poulie sont

$$\alpha_0 = \frac{x_1 - x_0}{r} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{20} = \frac{x_{21} - x_{20}}{r},$$

les angles étant exprimés en radians et le rayon, r, de la poulie avec la même unité que x et que l_0.

Application numérique :

$$\lambda_1 \text{ (fer)} = 11 \times 10^{-6}; \quad \lambda \text{ (aluminium)} = \frac{73}{3} \times 10^{-6};$$

$l_0 = 10$ cm, ou 100 mm; $t = 1$ °C; $t = 20$ °C; $t = 21$ °C; $r = 1$ mm.

$$x = 100\sqrt{\left(\frac{73}{3} - 11\right) \times \frac{10^{-6}}{2} \times t} = 10^{-1}\sqrt{\frac{20}{3} \times t} \text{ mm}.$$

Déplacement pour la variation de température de 0 °C à 1 °C :

$t = 0, \quad x_0 = 0,$

$$t = 1, \quad x_1 = 10^{-1}\sqrt{\frac{20}{3} \times 1} = 10^{-1} \times 2{,}582 = 0{,}258\,2 \text{ mm}.$$

$$x_1 - x_0 = \mathbf{0{,}258 \text{ mm}}.$$

Déplacement pour la variation de température de 20 °C à 21 °C :

$$t = 20, \quad x_{20} = 10^{-1}\sqrt{\frac{20}{3} \times 20} = 10^{-1} \times 20\frac{\sqrt{3}}{3} = 1{,}155 \text{ mm},$$

$$t = 21, \quad x_{21} = 10^{-1}\sqrt{\frac{20}{3} \times 21} = 10^{-1} \times 11{,}83 = 1{,}183 \text{ mm}.$$

$$x_{21} - x_{20} = 1{,}183 - 1{,}155,$$

$$x_{21} - x_{20} = \mathbf{0{,}028 \text{ mm}}.$$

Rotation de la poulie pour la variation de température de 0 °C à 1 °C :

$$\alpha_0 = \frac{0{,}258}{1} = 0{,}258 \text{ radian}, \qquad \alpha_0 = \mathbf{0{,}26 \text{ radian}}.$$

Rotation pour la variation de température de 20 °C à 21 °C :

$$\alpha_{20} = \frac{0{,}028}{1} = \mathbf{0{,}028 \text{ radian}}.$$

62. — Dilatation d'un ensemble de deux tiges soudées bout à bout.

1° Une tige de cuivre a 50 cm de longueur à 20° C; calculer sa longueur à 100 °C.

2° Une sphère de cuivre a 10 cm de diamètre à 20 °C; calculer son volume à 300 °C.

3° On met en prolongement une tige de cuivre de longueur x cm et une tige de cadmium de longueur y cm. A 0 °C, $x + y = 100$ cm.

Quand on élève la température, l'ensemble des tiges se dilate comme une tige homogène d'étain de 100 cm de longueur à 0 °C.

Calculer x et y.

Coefficients de dilatation linéaire : cuivre, 16.10^{-6}; cadmium, 42.10^{-6}; étain, 28.10^{-6}.

(Bacc., Poitiers.)

1° La longueur d'une tige de cuivre à la température t °C est égale à sa longueur à 0 °C multipliée par le binôme de dilatation linéaire du cuivre :

$$l = l_0(1 + \lambda t).$$

A la température t' °C sa longueur est

$$l' = l_0(1 + \lambda t').$$

En divisant membre à membre ces deux expressions nous éliminons la quantité l_0 inconnue :

$$\frac{l'}{l} = \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t}.$$

Cette relation permet de calculer l' :

$$l' = l \times \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t}.$$

Application numérique :

$$l = 50 \text{ cm}, \quad t = 20 \text{ °C}, \quad t' = 100 \text{ °C}, \quad \lambda = 16 \times 10^{-6}.$$

$$l' = 50 \times \frac{1 + 16 \times 10^{-6} \times 100}{1 + 16 \times 10^{-6} \times 20} = 50 \times \frac{1{,}001\,6}{1{,}000\,32},$$

$$\boldsymbol{l' = 50{,}063 \text{ cm}.}$$

2° Le volume d'une sphère de cuivre à la température t °C est égal au volume à 0 °C multiplié par le binôme de dilatation cubique du cuivre :

$$v = v_0(1 + kt).$$

On sait que le coefficient de dilatation cubique d'un solide est égal à trois fois le coefficient de dilatation linéaire :

$$k = 3\lambda,$$

d'où

$$v = v_0(1 + 3\lambda t).$$

De même, à la température t' °C, le volume v' a pour expression

$$v' = v_0(1 + 3\lambda t').$$

Comme précédemment, nous avons

$$v' = v \times \frac{1 + 3\lambda t'}{1 + 3\lambda t}.$$

Application numérique :

$$v = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi \times 10^3}{6} \text{ cm}^3; \quad \lambda = 16 \times 10^{-6}; \quad t = 20 \text{ °C}, \quad t' = 300 \text{ °C}.$$

$$= \frac{\pi \times 10^3}{6} \times \frac{1 + 3 \times 16 \times 10^{-6} \times 300}{1 + 3 \times 16 \times 10^{-6} \times 20} = \frac{3\,141{,}6}{6} \times \frac{1{,}014\,4}{1{,}000\,96} = 530{,}630 \text{ cm}^3,$$

$$\boldsymbol{v' = 530{,}6 \text{ cm}^3.}$$

3° A la température t °C la longueur de la tige de cuivre, dont la longueur à 0 °C est x et le coefficient de dilatation linéaire λ, est

$$l = x(1 + \lambda t).$$

A cette température t °C la longueur de la tige de cadmium dont la longueur à 0 °C est y et le coefficient de dilatation linéaire λ' est

$$l' = y(1 + \lambda' t).$$

Toujours à cette température t °C la longueur de la tige d'étain dont la longueur à 0 °C est $x + y$ et le coefficient de dilatation linéaire λ'' est

$$l'' = (x + y)(1 + \lambda'' t).$$

Posons $$l + l' = l''.$$

$$x(1 + \lambda t) + y(1 + \lambda' t) = (x + y)(1 + \lambda'' t).$$

Après simplification, nous obtenons l'équation suivante :

(1) $$\lambda x + \lambda' y = (x + y)\lambda''.$$

On donne d'autre part

(2) $$x + y = l_0.$$

Nous avons un système de deux équations à deux inconnues, x et y, que nous pouvons résoudre.

Application numérique :

$$x + y = l_0 = 100 \text{ cm}; \quad \lambda = 16 \times 10^{-6}; \quad \lambda' = 42 \times 10^{-6}; \quad \lambda'' = 28 \times 10^{-6}.$$

$$16 \times 10^{-6} \times x + 42 \times 10^{-6} \times y = 100 \times 28 \times 10^{-6},$$

$$16x + 42y = 100 \times 28,$$

$$x + y = 100.$$

La résolution de ce système donne

$$x = 100 \times \frac{42 - 28}{42 - 16}, \qquad \boldsymbol{x = 53{,}85 \text{ cm},}$$

$$y = 100 \times \frac{28 - 16}{42 - 16}, \qquad \boldsymbol{y = 46{,}15 \text{ cm}.}$$

63. — Erreur commise dans la détermination du volume d'un liquide à l'aide d'un ballon jaugé.

Un ballon jaugé a une capacité de 250 cm³ à 15 °C. Le trait de repère est porté sur le goulot, dont le diamètre est 2,00 cm. Le ballon est rempli de liquide jusqu'au trait de repère à la température de 35 °C.

a) Quel est le volume réel du liquide à 35 °C?

b) Quelle erreur relative commet-on dans la détermination de ce volume si l'on néglige la dilatation de l'enveloppe?

c) On admet que la coïncidence du trait de repère et de la surface libre du liquide peut être appréciée à 0,2 mm près. Quelle est l'incertitude relative de la détermination du volume du liquide?

Peut-on négliger de faire la correction de température calculée ci-dessus?

Coefficient de dilatation cubique du verre : $k = 3 \times 10^{-5}$.

a) Soient v le volume du ballon à la température $t = 15$ °C et v' le volume à la température $t' = 35$ °C.

Ces deux volumes sont donnés, en fonction du volume v_0 à 0 °C, par les expressions

$$v = v_0(1 + kt),$$
$$v' = v_0(1 + kt').$$

En divisant membre à membre ces deux expressions, nous obtenons

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 + kt'}{1 + kt}.$$

kt' et kt sont des nombres très petits devant 1. Appliquons les formules d'approximation connues :

$$\frac{1 + \varepsilon'}{1 + \varepsilon} \approx (1 + \varepsilon')(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon' - \varepsilon.$$
$$\frac{v'}{v} \approx (1 + kt')(1 - kt) \approx 1 + kt' - kt = 1 + k(t' - t);$$

d'où

$$v' = v[1 + k(t' - t)].$$

Le volume réel du liquide à la température t' est égal au volume du ballon à la même température.

Application numérique :

$$t = 15\ °C, \qquad t' = 35\ °C, \qquad k = 3 \times 10^{-5}, \qquad v = 250\ cm^3.$$
$$v' = 250[1 + 3 \times 10^{-5}(35 - 15)],$$
$$v' = 250\left(1 + \frac{6}{10^4}\right),$$
$$\mathbf{v' = 250{,}15\ cm^3.}$$

b) Si l'on néglige la dilatation de l'enveloppe, on commet, dans la détermination du volume, une erreur absolue $\Delta v = v' - v$, ou

$$\Delta v = v \times k(t' - t),$$

et une erreur relative

$$\frac{\Delta v}{v} = k(t' - t).$$

Numériquement :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{3}{10^5}(35 - 15) = \frac{3 \times 20}{10^5},$$
$$\mathbf{\frac{\Delta v}{v} = \frac{6}{10^4}.}$$

c) Si la coïncidence du trait de repère et de la surface libre peut être appréciée avec une approximation égale à Δh, l'incertitude absolue de la détermination du volume du liquide est

$$\Delta v = \frac{\pi d^2}{4} \times \Delta h,$$

d désignant le diamètre du goulot.

L'incertitude relative est

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\pi d^2}{4} \times \Delta h \times \frac{1}{v}.$$

Application numérique :

$d = 2{,}00$ cm; $\Delta h = 0{,}2$ mm, ou $0{,}02$ cm; $v = 250$ cm^3.

$$\Delta v = \frac{\pi \times 2^2}{4} \times 0{,}02 = 0{,}063 \text{ cm}^3.$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0{,}063}{250}, \qquad \frac{\Delta v}{v} = \frac{2{,}5}{10^4}.$$

Cette incertitude est inférieure à l'erreur que nous commettons si nous négligeons de faire la correction de température. Il est donc indispensable de faire cette correction. Cette correction étant faite, il reste l'erreur de lecture $0{,}063$ cm$^3 \approx 0{,}07$ cm^3.

Nous pouvons mettre le résultat de la mesure sous la forme

$$\mathbf{v' = 250{,}15 \text{ cm}^3 \pm 0{,}07 \text{ cm}^3.}$$

CHAPITRE XVI

Dilatation des liquides.

64. — Mesure du coefficient de dilatation absolue d'un liquide.

Une sphère en acier de masse volumique 7,71 g/cm³ et pesant 33,3 g est suspendue par un fil fin sous un plateau de balance. Celle-ci étant équilibrée, on immerge la sphère dans un vase contenant de l'huile de masse volumique 0,810 g/cm³. Quelle charge faut-il disposer sur le plateau pour rétablir l'équilibre?

L'expérience précédente a eu lieu à 0 °C. On chauffe le vase à 100 °C. Sachant que le coefficient de dilatation linéaire de l'acier est 0,000 011 et que, pour maintenir l'équilibre, il faut enlever maintenant 0,240 g du plateau qui soutient la sphère, déterminer le coefficient de dilatation de l'huile.

(Bacc., Strasbourg.)

1° Désignons par m la masse de la sphère, par v_0 son volume à 0 °C, par μ_0, μ'_0 et a_0 les masses volumiques de l'acier, de l'huile et de l'air à 0 °C.

Lorsque la balance est équilibrée dans l'air, le plateau soutenant la sphère est soumis à l'action de deux forces verticales de sens contraire :

— le poids de la sphère, égal au produit $m \times g$ de sa masse par l'intensité de la pesanteur,

— la poussée d'Archimède due à l'air, égale à $a_0 \times v_0 \times g$.

La résultante est le poids apparent de la sphère dans l'air :

$$P_a = m \times g - a_0 \times v_0 \times g.$$

Si la sphère est plongée dans l'huile, le plateau est soumis à l'action du poids de la sphère et de la poussée d'Archimède due à l'huile. La résultante est le poids apparent de la sphère dans l'huile :

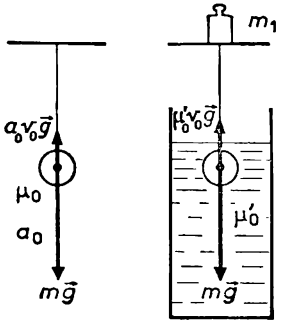
$$P'_a = m \times g - \mu'_0 \times v_0 \times g.$$

L'équilibre est rompu.

Pour rétablir l'équilibre, il faut placer sur le plateau une masse m_1 de poids $m_1 \times g$ qui représente la différence des deux poussées d'Archimède :

$$m_1 \times g = \mu_0' \times v_0 \times g - a_0 \times v_0 \times g.$$

Si l'on néglige la poussée d'Archimède due à l'air, on peut écrire



$$m_1 \times g = \mu_0' \times v_0 \times g,$$

d'où $$m_1 = \mu_0' \times v_0.$$

Le volume v_0 de la sphère est le quotient de sa masse m par sa masse volumique μ_0 :

(1) $$m_1 = \mu_0' \times \frac{m}{\mu_0}.$$

Application numérique :

$\mu_0 = 7{,}71$ g/cm³, $m = 33{,}3$ g,

$\mu_0' = 0{,}810$ g/cm³.

$$m_1 = 0{,}810 \times \frac{33{,}3}{7{,}71} = 3{,}498 \text{ g}, \qquad \mathbf{m_1 = 3{,}5 \text{ g}.}$$

2° Quand la sphère est placée dans l'huile à t °C il faut placer sur le plateau de la balance, pour rétablir l'équilibre, une masse m_2 de poids $m_2 \times g$ qui représente sensiblement la poussée d'Archimède due à l'huile à cette température. Désignons par μ' et μ les masses volumiques de l'huile et de l'acier à t °C :

$$m_2 \times g = \mu' \times \frac{m}{\mu} \times g, \qquad m_2 = \mu' \times \frac{m}{\mu}.$$

Nous savons que la masse volumique à t °C est égale à la masse volumique à 0 °C divisée par le binôme de dilatation cubique.

Pour l'acier,

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + kt};$$

pour l'huile,

$$\mu' = \frac{\mu_0'}{1 + k't}.$$

$$m_2 = \frac{\mu_0'}{1 + k't} \times \frac{m}{\frac{\mu_0}{1 + kt}} = \mu_0' \times \frac{m}{\mu_0} \times \frac{1 + kt}{1 + k't}.$$

Tenant compte de l'expression (1), nous trouvons pour m_2

$$m_2 = m_1 \times \frac{1 + kt}{1 + k't}.$$

Cette relation nous permet de calculer k', coefficient de dilatation de l'huile, si nous connaissons les autres quantités :

$$1 + k't = \frac{m_1}{m_2}(1 + kt) = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1}{m_2} \times kt.$$

$$k' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 \times t} + \frac{m_1}{m_2} \times k.$$

Application numérique :

$m_1 - m_2 = 0{,}240$ g, $\quad m_2 = m_1 - 0{,}240 = 3{,}498 - 0{,}240 = 3{,}258$ g,

$t = 100$ °C, $\quad k = 3\lambda = 3 \times 0{,}000\,011 = 0{,}000\,033.$

$$k' = \frac{0{,}240}{3{,}258 \times 100} + \frac{3{,}498}{3{,}258} \times 0{,}000\,033,$$

$$k' = 0{,}000\,772.$$

65. — Variation de volume d'une masse donnée de mercure.

Un petit ballon de verre dont le col est effilé à son extrémité a une capacité de 100 cm³ à 0 °C. Il contient 1 346,4 g de mercure.

1° A quelle température le mercure emplit-il exactement le ballon?

2° On porte le ballon à 100 °C. Quel est le volume du mercure écoulé?

3° Établir les formules générales donnant, en fonction de la température, le volume et la masse du mercure écoulé.

On donne :
coefficient de dilatation absolue du mercure : 0,000 182;
coefficient de dilatation cubique du verre : 0,000 024;
masse volumique du mercure à 0 °C : 13,586 g/cm³.

(Bacc. tech., Nancy.)

1° Si nous désignons par μ_0 la masse volumique du mercure à 0 °C et par m_0 sa masse initiale, le volume qu'il occupe à cette température est

$$v_0 = \frac{m_0}{\mu_0}.$$

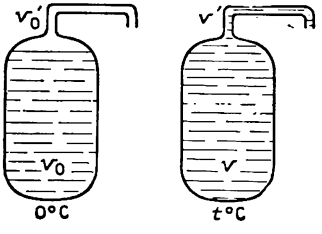


FIG. 1.

A la même température, 0 °C, le ballon de verre a un volume v'_0.

v_0 doit être inférieur à v'_0 (*fig.* 1).

En élevant la température de l'ensemble, le coefficient de dilatation absolue du mercure, k, étant plus élevé que le coefficient de dilatation cubique du verre, k', on pourra trouver une température t pour laquelle

le volume v du mercure et le volume v' du ballon seront égaux.

$$v = v_0(1 + kt),$$
$$v' = v'_0(1 + k't).$$

Si nous posons $v = v'$,

nous avons $v_0(1 + kt) = v'_0(1 + k't)$.

Cette équation nous permet de calculer t :

$$(1) \qquad t = \frac{v'_0 - v_0}{v_0 \times k - v'_0 \times k'}.$$

Application numérique :

$$v_0 = \frac{m_0}{\mu_0} = \frac{1\,346{,}4}{13{,}586} = 99{,}102 \text{ cm}^3; \qquad v'_0 = 100 \text{ cm}^3;$$
$$k = 0{,}000\,182; \qquad k' = 0{,}000\,024.$$
$$t = \frac{100 - 99{,}102}{99{,}102 \times 0{,}000\,182 - 100 \times 0{,}000\,024},$$
$$t = \frac{0{,}898 \times 10^6}{99{,}102 \times 182 - 2\,400} = \frac{898\,000}{15\,636},$$
$$\mathbf{t = 57{,}4\ ^\circ C.}$$

2° Le volume du mercure écoulé lorsque la température t est supérieure à 57,4 °C est la différence entre le volume du mercure et le volume du ballon à cette température (*fig.* 2) :

$$v = v_0(1 + kt), \qquad v' = v'_0(1 + k't),$$
$$v - v' = v_0(1 + kt) - v'_0(1 + k't).$$

Application numérique :

$t = 100$ °C; $v_0 = 99{,}102$ cm³; $v'_0 = 100$ cm³;
$k = 0{,}000\,182$; $k' = 0{,}000\,024$.

$v = 99{,}102(1 + 0{,}000\,182 \times 100) = 99{,}102 \times 1{,}018\,2$,
$v = 100{,}906$ cm³,
$v' = 100(1 + 0{,}000\,024 \times 100) = 100 \times 1{,}002\,4$,
$v' = 100{,}240$ cm³.

$$\mathbf{v - v' = 0{,}666\ cm^3.}$$

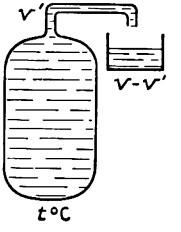


FIG. 2.

3° Le volume de mercure écoulé lorsque la température est t °C (*fig.* 2) est la différence $v - v'$:

$$v - v' = v_0(1 + kt) - v'_0(1 + k't),$$
$$v - v' = (v_0 \times k - v'_0 \times k')\,t - (v'_0 - v_0).$$

Si l'on prend $v - v' = 0$ on retrouve la relation (1).

La masse de mercure écoulé est la différence entre la masse initiale m_0 et la masse m contenue dans le ballon à la température t °C :

$$m_0 - m = m_0 - \mu \times v'.$$

v' volume du ballon à la température t vaut $v'_0(1 + k't)$.

μ, masse volumique du mercure à la température t, vaut $\frac{\mu_0}{1 + kt}$.

$$m_0 - m = m_0 - \frac{\mu_0}{1 + kt} \times v'_0(1 + k't),$$

$$m_0 - m = m_0 - \mu_0 \times v'_0 \times \frac{1 + k't}{1 + kt}.$$

Application numérique :

$m_0 = 1\,346{,}4$ g; $\mu_0 = 13{,}586$ g/cm³; $v_0 = 99{,}102$ cm³; $v'_0 = 100$ cm³;
$k = 0{,}000\,182$; $k' = 0{,}000\,024$.

$$v - v' = (99{,}102 \times 0{,}000\,182 - 100 \times 0{,}000\,024)\,t - (100 - 99{,}102),$$

$$\mathbf{v - v' = 0{,}015\,636 \times t - 0{,}898\ cm^3.}$$

$$m_0 - m = 1\,346{,}4 - 13{,}586 \times 100 \times \frac{1 + 0{,}000\,024 \times t}{1 + 0{,}000\,182 \times t},$$

$$\mathbf{m_0 - m = 1\,346{,}4 - 1\,358{,}6 \times \frac{1 + 0{,}000\,024 \times t}{1 + 0{,}000\,182 \times t}.}$$

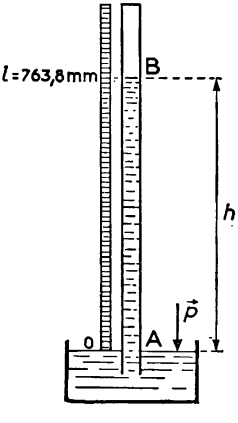
66. — Correction d'une mesure barométrique.

Une lecture barométrique, avec un baromètre à mercure, a été faite à la température de 15 °C. La hauteur de la colonne mercurielle, mesurée avec une règle en laiton, a été trouvée égale à 763,8 mm.

Exprimer la valeur de la pression atmosphérique en centimètres de mercure à 0 °C.

Coefficient de dilatation linéaire du laiton : $\lambda = 18 \times 10^{-6}$.
Coefficient de dilatation absolue du mercure : $m = 182 \times 10^{-6}$.

(Bacc. tech., Strasbourg.)



La mesure de la pression atmosphérique p par un baromètre à mercure résulte de l'application du principe fondamental de l'hydrostatique.

La différence de pression entre les points A et B du mercure est numériquement égale au produit du poids volumique ϖ par la distance verticale h qui sépare les deux points :

$$p_A - p_B = \varpi \times h.$$

La pression en A est la pression atmosphérique : $p_A = p$. La pression en B est nulle, la chambre barométrique étant vide : $p_B = 0$.

$$p = \varpi \times h.$$

ϖ, poids volumique du mercure, varie avec la température.

On peut exprimer ϖ, poids volumique à la température t °C, en fonction de ϖ_0, poids volumique à la température 0 °C.

Si l'on considère l'unité de volume à la température 0 °C, ce volume à la température t °C est multiplié par le binôme de dilatation cubique $(1 + mt)$. Le poids de l'unité de volume qui était ϖ_0 à 0 °C est, à t °C,

$$\varpi = \frac{\varpi_0}{1 + mt}.$$

D'autre part, la lecture de la dénivellation étant faite avec une règle dilatable, la hauteur h n'est pas la hauteur lue sur la règle.

La règle est étalonnée correctement à 0 °C mais à la température t °C la longueur d'une division doit être multipliée par le binôme de dilatation linéaire du métal $(1 + \lambda t)$.

De sorte que, pour les l divisions de la lecture, on aura une hauteur

$$h = l(1 + \lambda t).$$

La pression atmosphérique, compte tenu de la température, doit s'écrire ainsi :

$$p = \frac{\varpi_0}{1 + mt} \times l(1 + \lambda t),$$

ou (1)
$$p = \varpi_0 \times l \times \frac{1 + \lambda t}{1 + mt}.$$

Si la mesure avait été faite à la température 0 °C on aurait observé une dénivellation h_0 telle que

(2)
$$p = \varpi_0 \times h_0.$$

h_0 mesure donc la pression atmosphérique en centimètres de mercure à 0 °C, si la dénivellation est mesurée en centimètres :

$$h_0 = l \times \frac{1 + \lambda t}{1 + mt}.$$

Application numérique :

$l = 763{,}8$ mm, ou $76{,}38$ cm ; $\lambda = 18 \times 10^{-6}$; $m = 182 \times 10^{-6}$; $t = 15$ °C

$$h_0 = 76{,}38 \times \frac{1 + 18 \times 10^{-6} \times 15}{1 + 182 \times 10^{-6} \times 15},$$

$$h_0 = \frac{76{,}38 \times 1{,}000\,270}{1{,}002\,73},$$

$$\mathbf{h_0 = 76{,}19 \text{ cm}.}$$

67. — Mesure du coefficient de dilatation apparente du mercure.

La tige d'un thermomètre à mercure porte 625 divisions d'égal volume et la masse de mercure qui remplirait, à 0 °C, ces 625 divisions est 2,5 g.

L'appareil contient 129,6 g de mercure. On le plonge dans la glace fondante. Le mercure affleure à la division 25. Puis on le place dans de la vapeur d'eau bouillante sous la pression de 76 cm de mercure. Le mercure affleure à la division 525. Calculer :

1° le coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre;

2° le coefficient de dilatation absolue de l'enveloppe de verre, sachant que le coefficient de dilatation absolue du mercure est 0,000 18.

Masse volumique du mercure à 0 °C : 13,59 g/cm³.

(Bacc. tech., Lille.)

1° Le coefficient de dilatation apparente d'un liquide dans un appareil gradué, entre 0 °C et t °C, est égal à la variation relative du volume apparent, mesuré par le nombre de divisions de l'appareil, pour une variation de température de 1 °C.

Dans le cas du thermomètre à mercure, si la tige est divisée en parties égales, de volume v_0 à 0 °C, le volume V_0 du réservoir à la même température, 0 °C, vaut N divisions de la tige. Il en est de même à n'importe quelle température : le volume du réservoir vaut toujours N divisions de la tige, le coefficient de dilatation cubique du réservoir étant le même que celui de la tige.

Si à la température 0 °C le mercure atteint la division n_0 de la tige et si, à la température t °C, il atteint la division n de la tige, les volumes apparents à 0 °C et t °C valent respectivement $N + n_0$ et $N + n$ divisions de l'appareil.

Dans ces conditions, le coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre de l'enveloppe a pour expression

$$c = \frac{(N + n) - (N + n_0)}{(N + n_0) \times t},$$

ou (1) $$c = \frac{n - n_0}{(N + n_0) \times t}.$$

Cette expression fait intervenir une nouvelle inconnue, N.

Il faut donc une nouvelle équation contenant N. Elle va nous être donnée par le remplissage de l'appareil.

Désignons par μ_0 la masse volumique du mercure à 0 °C, par m_1 la masse de mercure contenue dans l'appareil et par m_2 celle contenue dans les p divisions de la tige à 0 °C.

A 0 °C, le mercure, qui atteint la division n_0, occupe un volume $V_0 + n \times v_0 = (N + n)\, v_0$, dont la masse est

$$m_1 = \mu_0 (N + n_0)\, v_0.$$

A 0 °C, le mercure, qui occuperait uniquement toute la longueur de la tige, soit le volume $p \times v_0$, aurait une masse m_2 :

$$m_2 = \mu_0 \times p \times v_0.$$

Divisons membre à membre ces deux égalités :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{N + n_0}{p}. \tag{2}$$

Cette équation nous donnerait N si nous avions à le calculer. L'élimination de N entre les équations (1) et (2) est simple. Multiplions membre à membre (1) et (2) :

$$c \times \frac{m_1}{m_2} = \frac{n - n_0}{t} \times \frac{1}{p},$$

$$c = \frac{n - n_0}{t} \times \frac{m_2}{p \times m_1}.$$

Application numérique :

$n = 525$; $n_0 = 25$; $t = 100$ °C (température d'ébullition de l'eau sous la pression de 76 cm de mercure); $m_2 = 2{,}5$ g, $m_1 = 129{,}6$ g, $p = 625$.

$$c = \frac{525 - 25}{100} \times \frac{2{,}5}{625 \times 129{,}6} = \frac{1}{6\,480}, \qquad c = \mathbf{0{,}000\,154\,3}.$$

2° D'après la définition du coefficient de dilatation apparente, le volume apparent à t °C, compté, en nombre de divisions de l'appareil, est égal au volume apparent à 0 °C, compté également en nombre de divisions de l'appareil, multiplié par le binôme de dilatation apparente :

$$N + n = (N + n_0)(1 + ct).$$

Le volume réel de l'appareil à t °C jusqu'à la division n, en tenant compte du volume réel d'une division à cette température $v_0(1 + kt)$, est

$$(N + n) \times v_0(1 + kt) = (N + n_0)(1 + ct) \times v_0(1 + kt).$$

D'autre part le volume réel du mercure, à t °C, est égal à son volume à 0 °C multiplié par le binôme de dilatation absolue du mercure :

$$(N + n_0) \times v_0(1 + mt).$$

Ces deux volumes sont égaux (contenant = contenu) :

$$(N + n_0)(1 + ct) \times v_0(1 + kt) = (N + n_0) \times v_0(1 + mt).$$

Après simplification, cette équation se réduit à la suivante :

$$(1 + ct)(1 + kt) = 1 + mt,$$

ou

$$1 + ct + kt + ckt^2 = 1 + mt.$$

La valeur du coefficient de dilatation absolue de l'enveloppe de verre, k, dans l'intervalle de température 0 °C, t °C est alors donné par l'expression

$$k = \frac{m - c}{1 + ct}. \tag{3}$$

Application numérique :

$$m = 0{,}000\,180\,0; \quad c = 0{,}000\,154\,3; \quad t = 100\ ^{\circ}\text{C}.$$

$$k = \frac{0{,}000\,180\,0 - 0{,}000\,154\,3}{1 + 0{,}000\,154\,3 \times 100} = \frac{0{,}000\,025\,7}{1{,}015\,43}, \qquad \mathbf{k = 0{,}000\,025\,3.}$$

Remarques. — I. — La masse volumique du mercure, $\mu_0 = 13{,}59$ g/cm^3, est une donnée inutile. Elle n'aurait eu d'utilité que si l'on avait voulu calculer numériquement v_0 et V_0. Le texte ne demandait pas de faire ce calcul, pas plus que celui de N.

II. — Le lecteur après avoir calculé v_0, V_0 et N pourra poursuivre le calcul de k en considérant le thermomètre comme un dilatomètre à tige :

$$(N + n_0)(l + mt) = (N + n)(1 + kt).$$

Le calcul doit donner pour k rigoureusement le même nombre.

III. — En négligeant la quantité ct devant 1 dans l'expression (3), comme on le fait ordinairement, on trouverait pour k :

$$k = m - c = 0{,}000\,180\,0 - 0{,}000\,154\,3 = 0{,}000\,025\,7.$$

L'erreur absolue commise serait 0,000 000 4 et l'erreur relative

$$\frac{4}{253} \approx \frac{16}{1\,000}, \quad \text{ou environ } \frac{2}{100}.$$

68. — Détermination du coefficient de dilatation d'un liquide à l'aide du dilatomètre à tige.

Un dilatomètre en verre comporte un réservoir surmonté d'un tube cylindrique gradué en parties d'égal volume. Vide, il pèse 12 g; plein de mercure à la température de 0 °C jusqu'à la division 8, il pèse 156 g; plein de mercure à la température de 0 °C jusqu'à la division 80, il pèse 164 g.

1° Calculer le volume du réservoir et le volume d'une division de la tige à la température de 0 °C.

2° Le dilatomètre contient du mercure atteignant à 0 °C la division 11; on le chauffe à 100 °C : le mercure monte jusqu'à la division 32.
Calculer le coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe.

3° On remplace le mercure par un liquide qui atteint à 0 °C la division 9 et, à 50 °C, la division 89. Calculer le coefficient de dilatation vraie du liquide.

On donne la masse volumique du mercure, 13,6 g/cm^3 à 0 °C, et le coefficient de dilatation vraie du mercure, 0,000 18.

(Bacc. tech., Bordeaux.)

1° Posons : V_0, volume du réservoir à 0 °C;
v_0, volume d'une division de la tige à 0 °C;
m_0, masse du dilatomètre vide;
m_1, masse du dilatomètre rempli de mercure à 0 °C jusqu'à la division n_1;
m_2, masse du dilatomètre rempli de mercure à 0 °C, jusqu'à la division n_2;
μ_0, masse volumique du mercure à 0 °C.

Exprimons les masses de mercure contenues dans le dilatomètre jusqu'aux divisions n_1 et n_2.

$$\mu_0(V_0 + n_1 v_0) = m_1 - m_0,$$
$$\mu_0(V_0 + n_2 v_0) = m_2 - m_0.$$

Nous disposons de deux équations pour deux inconnues, V_0 et v_0.

Application numérique :

$$\mu_0 = 13{,}6 \text{ g/cm}^3, \quad m_0 = 12 \text{ g}, \quad m_1 = 156 \text{ g}, \quad n_1 = 8,$$
$$m_2 = 164 \text{ g}, \quad n_2 = 80.$$
$$13{,}6(V_0 + 8\ v_0) = 156 - 12,$$
$$13{,}6(V_0 + 80\ v_0) = 164 - 12,$$
$$V_0 + 8\ v_0 = \frac{144}{13{,}6},$$
$$V_0 + 80\ v_0 = \frac{152}{13{,}6}.$$

Ce système admet pour solution :

$$V_0 = \frac{1\,288}{122{,}4} = 10{,}522 \text{ cm}^3 \qquad V_0 = \mathbf{10{,}5 \text{ cm}^3},$$
$$v_0 = \frac{1}{122{,}4} = 0{,}008\,17 \text{ cm}^3 \qquad v_0 = \mathbf{0{,}008 \text{ cm}^3}.$$

2° Le coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe s'obtient à partir de l'équation du dilatomètre.

A la température t °C, le volume du mercure est égal au volume de l'enveloppe qui le contient.

Posons $V_0 = N \times v_0$. Le volume du mercure à t °C est égal au volume à 0 °C multiplié par le binôme de dilatation absolue, $1 + mt$.

Si, à 0 °C, le mercure atteint la division n_0, occupant un volume $(N + n_0)\, v_0$, son volume à t °C vaudra $(N + n_0) v_0 \times (1 + mt)$.

A t °C, le mercure atteint la division n. Il occupe au total $N + n$ divisions dont chacune vaut v_0 à 0°C et $v_0(1 + kt)$ à t °C. Le volume de l'enveloppe à t °C vaut $(N + n) \times v_0(1 + kt)$, $(1 + kt)$ étant le binôme de dilatation cubique de l'enveloppe.

Écrivons l'égalité de ces deux volumes, contenu et contenant :

$$(N + n_0) v_0(1 + mt) = (N + n) v_0(1 + kt),$$
$$\textbf{(1)} \qquad (N + n_0)(1 + mt) = (N + n)(1 + kt).$$

Cette équation permet de calculer k coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe si l'on connaît m, coefficient de dilatation absolue du mercure.

Application numérique :

$$N = \frac{V_0}{v_0} = 1\,288, \quad n_0 = 11, \quad n = 32, \quad m = 0{,}000\,18, \quad t = 100\ ^\circ C.$$

$$(1\,288 + 11)(1 + 0{,}000\,18 \times 100) = (1\,288 + 32)(1 + k \times 100),$$

$$1\,299 \times 1{,}018 = 1\,320 + 132\,000\ k,$$

$$k = \frac{2{,}382}{132\,000} = 0{,}000\,018,$$

$$\boldsymbol{k = 18 \times 10^{-6}}.$$

3° On remplace le mercure par un autre liquide dont le coefficient de dilatation absolue est x et qui atteint la division n_0 à 0 °C et n à t °C. L'équation (1) reste encore valable en y remplaçant m par x :

$$(N + n_0)(1 + xt) = (N + n)(1 + kt).$$

Dans cette équation, k est connu. On peut alors calculer x.

Application numérique :

$$N = \frac{V_0}{v_0} = 1\,288, \quad n_0 = 9, \quad n = 89, \quad k = 0{,}000\,018, \quad t = 50\ ^\circ C.$$

$$(1\,288 + 9)(1 + x \times 50) = (1\,288 + 89)(1 + 0{,}000\,018 \times 50),$$

$$1\,297(1 + 50\,x) = 1\,377 \times 1{,}000\,9,$$

$$50\,x = \frac{1\,377 \times 1{,}000\,9}{1\,297} - 1 = 0{,}062\,6,$$

$$x = \frac{0{,}062\,8}{50} = 0{,}001\,252,$$

$$\boldsymbol{x = 1\,250 \times 10^{-6}}.$$

69. Dilatomètre à tige renfermant deux liquides.

Un dilatomètre à tige est formé d'un réservoir en verre auquel est soudée une tige fine de section constante, graduée en parties d'égales longueurs, le zéro de la graduation étant au bas de la tige.

Le volume du réservoir comprend N = 1 000 divisions de la tige et vaut, à 0 °C, $V_0 = 10\ cm^3$.

1° A la température de 0° C, on fait affleurer du mercure au zéro de la graduation; puis on chauffe le tout jusqu'à 100 °C; le niveau du mercure s'élève jusqu'à la division 16,5. Sachant que le coefficient de dilatation absolue du mercure est égal à 0,000 182, déduire de cette expérience le coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe.

2° On remplace le mercure par un liquide qui affleure à la division 7,5 à 0 °C et à la division 95 à 100 °C. Déterminer le coefficient de dilatation absolue de ce liquide entre 0 et 100 °C.

3° A 0 °C, on introduit du mercure dans le fond du réservoir du dilatomètre et l'on fait ensuite l'affleurement à la division 15 avec le liquide dont on vient de calculer le coefficient de dilatation. On porte le tout à la température de 100 °C; le niveau supérieur du liquide qui surmonte le mercure s'élève jusqu'à la division 55. Quels sont les volumes respectifs du mercure et du liquide introduits dans le dilatomètre à 0 °C?

(Bacc., Bordeaux.)

1° L'équation du dilatomètre à tige exprime, à la température t °C, l'égalité des volumes du contenu et du contenant.

A 0 °C, le liquide atteint dans la tige la division n_0. Si l'on désigne par V_0 et v_0 les volumes du réservoir et d'une division à cette température, le volume à 0 °C du mercure est $V_0 + n_0 v_0$, ou $(N + n_0)v_0$, si l'on pose $V_0 = N \times v_0$.

A t °C, le volume du liquide est égal au volume à 0 °C multiplié par le binôme de dilatation absolue. Dans le cas du mercure, on a l'habitude de désigner par m le coefficient de dilatation absolue : le volume, à t °C, est donc $(N + n_0)v_0 \times (1 + mt)$.

A cette même température, le liquide (le mercure dans cette question) atteint la division n. Le volume du contenant comprend donc $N + n$ divisions de la tige. Si le verre ne s'était pas dilaté le volume d'une division serait v_0. Mais la dilatation lui a donné un volume $v_0(1 + kt)$, $(1 + kt)$ étant le binôme de dilatation du verre.

L'égalité des volumes du contenu et du contenant se traduit par l'équation

$$(N + n_0)v_0(1 + mt) = (N + n)v_0(1 + kt).$$

v_0 s'élimine dans cette équation, qui prend la forme

$$(1) \qquad (N + n_0)(1 + mt) = (N + n)(1 + kt).$$

Nous pouvons donc calculer k si m est connu.

Application numérique :

$N = 1\,000, \quad n_0 = 0, \quad n = 16{,}5, \quad t = 100\ °C, \quad m = 0{,}000\,182.$

$$(1\,000 + 0)(1 + 0{,}000\,182 \times 100) = (1\,000 + 16{,}5)(1 + k \times 100)$$

$$1\,018{,}2 = 1\,016{,}5 + 101\,650\,k$$

$$k = \frac{1\,018{,}2 - 1\,016{,}5}{101\,650} = \frac{1{,}7}{101\,650}.$$

$$k = 16{,}73 \times 10^{-6}.$$

2° Si l'on remplace le mercure par un liquide dont le coefficient de dilatation absolue est c et qui atteint les divisions n_0' et n' de l'appareil aux températures 0 °C et t °C, l'équation (1) s'écrit

$$(2) \qquad (N + n_0')(1 + ct) = (N + n')(1 + kt).$$

Cette équation nous permet de calculer c puisque nous connaissons k.

Application numérique :

$N = 1\,000$, $n'_0 = 7{,}5$, $n' = 95$, $k = 16{,}73 \times 10^{-6}$, $t = 100$ °C.

$$(1\,000 + 7{,}5)(1 + c \times 100) = (1\,000 + 95)(1 + 16{,}73 \times 10^{-6} \times 100),$$

$$1 + c \times 100 = \frac{1\,095}{1\,007{,}5} \times 1{,}001\,673 = 1{,}088\,6.$$

$$c = \frac{1{,}088\,6 - 1}{100}, \qquad \boldsymbol{c = 0{,}000\,886.}$$

3° Soient x et y les volumes, à 0 °C, de mercure et du liquide de coefficient de dilatation c.

A cette température, les deux liquides remplissent le dilatomètre jusqu'à la division n''_0.

$$x + y = (N + n''_0)\, v_0.$$

A la température t °C, les deux liquides remplissent le dilatomètre jusqu'à la division n''. A t °C, le volume du contenu est égal au volume du contenant :

$$x\,(1 + mt) + y\,(1 + ct) = (N + n'')\, v_0(1 + kt).$$

Ces deux équations permettent de calculer x et y.

Application numérique :

$N = 1\,000$, $v_0 = \dfrac{V_0}{N} = \dfrac{10}{1\,000} = 0{,}01$ cm³, $n''_0 = 15$, $n'' = 55$,

$t = 100$ °C, $m = 0{,}000\,182$, $c = 0{,}000\,886$, $k = 0{,}000\,016\,73$.

$$x + y = (1\,000 + 15) \times 0{,}01 = 10{,}15.$$

$$x(1 + 0{,}000\,182 \times 100) + y(1 + 0{,}000\,886 \times 100) = (1\,000 + 55) \times 0{,}01\,(1 + 0{,}000\,016\,73 \times 100),$$

$$x \times 1{,}018\,2 + y \times 1{,}088\,6 = 10{,}567\,65,$$

$$x \times 1{,}018\,2 + (10{,}15 - x)\,1{,}088\,6 = 10{,}567\,65,$$

$$0{,}070\,4\,x = 11{,}049\,29 - 10{,}567\,65.$$

$$x = \frac{0{,}481\,64}{0{,}070\,4}, \qquad \boldsymbol{x = 6{,}84\ \text{cm}^3},$$

$$y = 10{,}15 - 6{,}84, \qquad \boldsymbol{y = 3{,}31\ \text{cm}^3}.$$

CHAPITRE XVII

Dilatation des gaz.

70. — Mesure du coefficient d'augmentation de pression d'un gaz à volume constant.

Pour mesurer le coefficient β d'augmentation de pression à volume constant d'un gaz, on dispose d'un récipient en laiton dont le volume, à 0 °C, est 1 litre, qui communique par un tube très fin avec un manomètre à mercure dont les deux branches ont une section de 3 cm². La pression du gaz à 0 °C est égale à la pression extérieure et vaut 76 cm de mercure.

1° On porte le gaz à 50 °C et l'on ramène le volume à sa valeur initiale en versant du mercure dans la branche ouverte du manomètre. Quand c'est fait, on constate entre les deux branches une dénivellation de 13,77 cm, mesurée à 0,1 mm près. Calculer le coefficient β en indiquant la précision obtenue (température et pression initiales sont supposées exactement connues).

2° Dans le calcul précédent, on n'a pas tenu compte de la dilatation du récipient, qui fait que le volume n'est pas tout à fait constant. Reprendre le calcul de β en admettant pour le laiton un coefficient de dilatation cubique de 0,000 054.

3° Dans l'expérience décrite, comment se placent les niveaux du mercure dans les deux branches du manomètre, quand le gaz a été porté à 50 °C et avant qu'on ait versé du mercure? Les dessiner et calculer l'abaissement x du niveau dans la branche communiquant avec le récipient à gaz. Faire ce calcul en négligeant la dilatation du récipient et en admettant pour le gaz, supposé parfait, le coefficient de dilatation qu'on vient de trouver, bien que le volume et la pression aient varié en même temps.

(Bacc. tech., Besançon.)

1° Le coefficient d'augmentation de pression d'un gaz à volume constant, β, dans l'intervalle de température 0 °C, t °C, est la variation relative de pression que subit une masse constante de ce gaz occupant un volume constant, pour une variation de température de 1 °C :

$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 \times t}.$$

Si, à 0 °C, le niveau du mercure dans la branche du manomètre reliée au réservoir coïncide avec un repère A délimitant le volume du réservoir et si la pression du gaz est égale à la pression extérieure, p_0, le niveau dans la branche ouverte à l'air libre est situé en A′ dans le même plan horizontal que A (*fig.* 1).

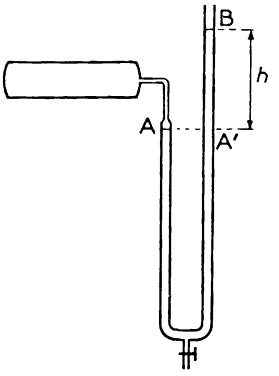


FIG. 1.

Si d'on veut maintenir constant le volume du gaz à t °C il faut verser du mercure dans la branche ouverte jusqu'à un niveau B.

La différence de pression entre A et B est donnée par le principe fondamental de l'hydrostatique :

$$p_A - p_B = \varpi \times h,$$

ϖ étant le poids volumique du mercure et h la distance verticale des niveaux A et B.

$p_A = p$, pression dans le réservoir,
$p_B = p_0$, pression de l'air extérieur.

Exprimons la pression p_0 d'après la hauteur de mercure h_0 :

$$p_0 = \varpi \times h_0.$$

$$p - p_0 = \varpi \times h.$$

$$\beta = \frac{\varpi \times h}{\varpi \times h_0 \times t},$$

$$\beta = \frac{h}{h_0 \times t}.$$

Si h_0 et t sont exactement connus, la seule erreur que comporte la mesure est l'erreur sur h. Soit Δh cette erreur. Elle entraîne sur β une erreur $\Delta\beta$ telle que

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\Delta h}{h}.$$

$\frac{\Delta\beta}{\beta}$, erreur relative sur la mesure de β indique la précision de la mesure.

Application numérique :

$h = 13{,}77$ cm, $\Delta h = 0{,}1$ mm, ou $0{,}01$ cm, $h_0 = 76$ cm, $t = 50$ °C.

$$\beta = \frac{13{,}77}{76 \times 50} = \frac{0{,}137\,7}{38}, \qquad \beta = 0{,}003\,623,$$

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{0{,}01}{13{,}77} = \frac{1}{1\,377}, \qquad \frac{\Delta\beta}{\beta} \approx \frac{7}{10\,000}.$$

2° Dans le calcul précédent nous avons considéré comme constant le volume du gaz. En réalité, ce volume a varié puisque le réservoir qui le contient s'est dilaté. En passant de 0 °C à t °C le volume v_0 est devenu

$$v_0(1 + kt),$$

de sorte que la pression du gaz, p, doit être remplacée par la pression p' qu'aurait le gaz si, à la température t, il avait conservé le volume v_0. La nouvelle valeur du coefficient β serait alors

$$\beta' = \frac{p' - p_0}{p_0 \times t}.$$

Nous pouvons calculer p' en appliquant la loi de Mariotte à la masse constante de gaz du réservoir pris à la température constante t °C.

Dans le premier état, le volume est $v_0(1 + kt)$, la pression, p.

Dans le deuxième état, le volume est v_0, la pression p'.

$$p' \times v_0 = p \times v_0(1 + kt),$$
$$p' = p\,(1 + kt).$$

Exprimons les pressions en fonction des hauteurs de mercure :

$$p_0 = \varpi \times h_0,$$
$$p = p_0 + \varpi \times h = \varpi \times h_0 + \varpi \times h,$$
$$p' - p_0 = \varpi\,(h_0 + h)\,(1 + kt) - \varpi \times h_0,$$
$$p' - p_0 = \varpi\,(h + h_0kt + hkt).$$
$$\beta' = \frac{\varpi\,(h + h_0kt + hkt)}{\varpi \times h_0 \times t},$$
$$\beta' = \frac{h}{h_0 \times t} + k \times \frac{h_0 + h}{h_0},$$
$$\beta' = \beta + k \times \frac{h_0 + h}{h_0}.$$

Application numérique :

$$\beta = 0{,}003\,623, \quad k = 0{,}000\,054, \quad h_0 = 76 \text{ cm}, \quad h = 13{,}77 \text{ cm}.$$

$$\beta' = 0{,}003\,623 + 0{,}000\,054 \times \frac{76 + 13{,}77}{76} = 0{,}003\,623 + 0{,}000\,064$$

$$\boldsymbol{\beta' = 0{,}003\,687.}$$

Le terme correctif dû à la dilatation du réservoir représente, si on le néglige, une erreur relative de

$$\frac{0{,}000\,064}{0{,}003\,687} = \frac{64}{3\,687} \approx \frac{170}{10\,000}.$$

Cette erreur est beaucoup plus grande que l'erreur sur h. On n'a donc pas le droit de la négliger.

3° Avant de verser le mercure dans la branche ouverte, le gaz s'est dilaté et le niveau du mercure dans la branche reliée au réservoir s'est abaissé de x tandis qu'il s'est élevé de la même quantité x dans la branche ouverte (*fig.* 2).

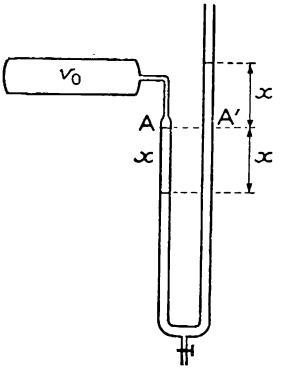


FIG. 2.

Nous pouvons connaître x par application de l'équation caractéristique des gaz parfaits $\frac{pv}{1+\alpha t} = p_0 v_0$.

Nous avons en effet une masse de gaz constante dans deux états différents :

1er état : volume v_0, pression p_0, température 0 °C.

2e état : volume $v = v_0 + sx$, pression $p = p_0 + \varpi \times 2x$, température t °C.

Nous écrivons la formule des gaz parfaits en prenant $\alpha = \beta'$:

$$\frac{(p_0 + \varpi \times 2x)(v_0 + sx)}{1 + \beta' t} = p_0 v_0.$$

Remplaçons p_0 par sa valeur $\varpi \times h_0$:

$$(\varpi \times h_0 + \varpi \times 2x)(v_0 + sx) = \varpi \times h_0 \times v_0(1 + \beta' t).$$

Divisons par ϖ :

$$(h_0 + 2x)(v_0 + sx) = h_0 \times v_0(1 + \beta' t).$$

Nous obtenons ainsi, après simplifications, une équation du second degré en x :

$$2sx^2 + (2v_0 + h_0 s)x - h_0 \times v_0 \times \beta' t = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires. La racine positive est seule acceptable.

Application numérique :

$s = 3$ cm^2, $v_0 = 1\,000$ cm^3, $h_0 = 76$ cm, $\beta' = 0{,}003\,687$, $t = 50$ °C.

$$2 \times 3x^2 + (2 \times 1\,000 + 76 \times 3)x - 76 \times 1\,000 \times 0{,}003\,687 \times 50 = 0,$$

$$6x^2 + 222\,8x - 14\,010{,}6 = 0,$$

$$3x^2 + 1\,114x - 7\,005{,}3 = 0,$$

$$x = \frac{-557 \pm \sqrt{557^2 + 21\,015{,}9}}{3} = \frac{-557 \pm 575{,}5}{3},$$

$$x = \frac{-557 + 575{,}5}{3} = \frac{18{,}5}{3},$$

$$\boldsymbol{x \approx 6{,}2 \text{ cm.}}$$

71. — Déplacement d'un piston dans un cylindre contenant de l'air à température variable.

Un corps de pompe cylindrique de 10 cm de rayon est muni d'un piston mobile placé à 25 cm du fond. Il est rempli d'air à la pression atmosphérique et à une température de 20 °C.

1° Quel est le déplacement du piston quand on abaisse à 0 °C la température de l'air contenu dans le corps de pompe?

2° Quelle masse faut-il placer sur le piston pour doubler la pression exercée sur le gaz?

Quel est alors le déplacement du piston :

a) quand la température a repris sa valeur initiale 20 °C;

b) quand on abaisse à 10 °C la valeur de cette température?

3° Le corps de pompe est relié d'une manière permanente avec un réservoir contenant de l'air comprimé à une pression de 10 atmosphères, la masse posée sur le piston étant maintenue. On laisse le piston se déplacer de 20 cm. Quel est le travail produit?

Pression atmosphérique : 76 cm de mercure. Masse volumique du mercure : 13,6 g/cm³. $\alpha = \frac{1}{273}$.

Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81$ N/kg.

(Bacc. tech., Montpellier.)

1° Quand on diminue de 20 °C à 0 °C la température de l'air contenu dans le cylindre, le piston s'abaisse d'une longueur x (*fig.* 1).

Cette longueur peut se calculer en appliquant la loi de Gay-Lussac. Nous avons en effet une masse d'air m constante soumise à une pression p_0 constante. Son volume v à la température t est

$$v = v_0(1 + \alpha t). \qquad (1)$$

En désignant par s la section du cylindre et par l la hauteur à t °C, les volumes v et v_0 ont pour expression

$$v = s \times l,$$
$$v_0 = s\,(l - x);$$

la relation (1) s'écrit

$$s \times l = s(l - x)\,(1 + \alpha t), \qquad \text{ou} \qquad l = (l - x)\,(1 + \alpha t).$$

Cette équation permet de calculer x :

$$x = \frac{l \alpha t}{1 + \alpha t}.$$

Application numérique :

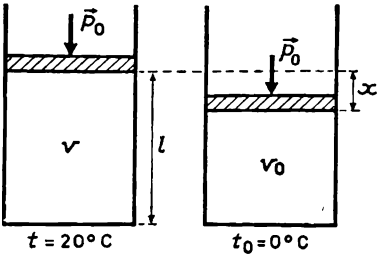


FIG. 1.

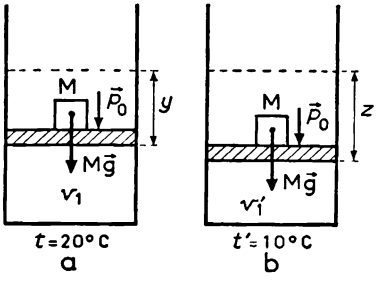


FIG. 2.

$$l = 25 \text{ cm}, \ \alpha = \frac{1}{273} \quad t = 20 \text{ °C}.$$

$$x = \frac{25 \times \frac{1}{273} \times 20}{1 + \frac{20}{273}} = \frac{500}{293} \text{ cm},$$

$$\boldsymbol{x = 1{,}70 \text{ cm}.}$$

2° Si l'on veut doubler la pression exercée sur le gaz il faut que le poids Mg, qui est uniformément réparti sur la surface du piston $s = \pi r^2$, produise une pression

$$p_0 = \frac{Mg}{\pi r^2}.$$

Exprimons cette pression dans le système légal, à partir de la hauteur de mercure h_0 et de la masse volumique du mercure :

$$p_0 = \mu g h_0.$$

$$\mu g h_0 = \frac{Mg}{\pi r^2},$$

$$M = \mu h_0 \times \pi r^2.$$

Application numérique :

$\mu = 13{,}6$ g/cm³, ou 13 600 kg/m³; $h_0 = 76$ cm, ou 0,76 m de mercure; $r = 10$ cm, ou 0,10 m.

$$M = 13\,600 \times 0{,}76 \times \pi \times (0{,}1)^2 = 324{,}550 \text{ kg},$$

$$\boldsymbol{M = 325 \text{ kg}.}$$

Déplacement du piston. — *a*) Ayant doublé la pression et ramené l'air à la température initiale, t °C, le piston a subi, par rapport à la position initiale, un déplacement y (*fig.* 2, *a*), que nous pouvons calculer par application de la loi de Mariotte.

Nous avons en effet une masse d'air m à la température constante t °C. Dans l'état initial, le volume de l'air est $v = s \times l$, sa pression est p_0. Dans l'état final, le volume est $v_1 = s\,(l - y)$ et la pression $p_1 = 2p_0$.

$$p_1 \times v_1 = p_0 \times v,$$

$$2p_0 \times s\,(l - y) = p_0 \times s \times l,$$

$$y = \frac{l}{2}.$$

Numériquement :

$$y = \frac{25}{2}\text{ cm}, \qquad y = \mathbf{12{,}5\ cm.}$$

b) La pression étant toujours $p_1 = 2p_0$, si l'on abaisse la température à t' °C le piston subit un déplacement z par rapport à la position initiale (*fig.* 2, *b*).

Ce déplacement z peut être calculé par application de la loi de Gay-Lussac.

Nous avons en effet une masse d'air m soumise à une pression $2p_0$ constante. Dans l'état *a*) le volume est $v_1 = s\,(l - y) = s\,\frac{l}{2}$ et la température t °C. A la température 0 °C et sous cette pression $2p_0$, le volume serait $\frac{v_0}{2}$. On a donc

$$v_1 = \frac{v_0}{2}(1 + \alpha t).$$

De même, dans l'état *b*), le volume $v_1' = s\,(l - z)$ et la température t' °C sont liés par la relation

$$v_1' = \frac{v_0}{2}(1 + \alpha t').$$

Faisons le rapport $\frac{v_1'}{v_1}$.

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t},$$

$$\frac{s \times (l - z)}{s \times \frac{l}{2}} = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t},$$

$$2 \times \frac{l - z}{l} = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t}.$$

Cette équation nous permet de calculer z :

$$z = l - \frac{l}{2} \times \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t}.$$

Application numérique :

$$l = 25\text{ cm}; \qquad \alpha = \frac{1}{273}; \qquad t = 20\text{ °C}; \qquad t' = 10\text{ °C}$$

$$z = 25 - \frac{25}{2} \times \frac{1 + \frac{10}{273}}{1 + \frac{20}{273}} = 25 - \frac{25}{2} \times \frac{283}{293},$$

$$z = 25 - 12{,}07 = 12{,}93\ \text{cm},$$

$$\mathbf{z = 12{,}9\ cm.}$$

3° Le corps de pompe étant relié d'une manière permanente à un réservoir contenant de l'air comprimé sous la pression p_2 les deux faces du piston sont soumises à des forces

$$p_2 \times s \qquad \text{et} \qquad 2p_0 \times s.$$

La force résultante est

$$F = p_2 \times s - 2p_0 \times s = (p_2 - 2p_0)\, s.$$

Pour un déplacement d du piston le travail produit est

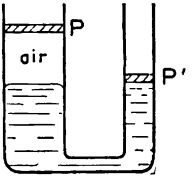
$$W = F \times d = (p_2 - 2p_0)s \times d,$$
$$W = (p_2 - 2p_0)\pi r^2 \times d.$$

Application numérique :

$$p_2 = 10\ p_0, \qquad p_0 = \mu g h_0 = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}76 \text{ Pa},$$
$$r = 10 \text{ cm}, \quad \text{ou} \quad 0{,}10 \text{ m}, \qquad d = 20 \text{ cm}, \quad \text{ou} \quad 0{,}2 \text{ m}.$$
$$W = (10 - 2)p_0 \times \pi r^2 \times d = 8 \times 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}76 \times \pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}2,$$
$$W = 1.6 \times 136 \times 9{,}81 \times 0{,}76 \times \pi = 5\,094 \text{ joules},$$
$$\mathbf{W = 5\ 100\ joules.}$$

72. — Dilatation d'une masse d'air contenu dans un récipient formé de deux vases communicants.

Un récipient est formé de deux vases communicants cylindriques, l'un de 100 cm² de section, l'autre de 10 cm², tous deux ouverts. Il y a du mercure dans les deux branches. Un piston P, de poids négligeable, isole une hauteur d'air de 21 cm, à la pression de 100 062 pascals, dans la grande branche; un piston P' de poids négligeable repose sur le mercure de la petite branche. La température de l'expérience est 0 °C.



1° La pression atmosphérique du moment étant 75 cm de mercure, déterminer le niveau du mercure dans les deux branches.

2° On pose un poids de 50,03 N sur P'. Quel poids F faut-il mettre sur P pour que les niveaux du mercure soient les mêmes que dans la question 1°? Quelle est alors la nouvelle hauteur de l'air emprisonné?

3° On enlève F tout en laissant le poids de 50,03 N sur P' et l'on porte tout l'appareil à 100 °C. Déterminer les positions des niveaux du mercure dans les deux branches et la nouvelle hauteur de l'air.

Coefficient de dilatation absolue du mercure : 0, 000 18.

Coefficient de dilatation des gaz : $\alpha = \dfrac{1}{273}$.

Poids volumique du mercure à 0° C : $\rho_0 = 133\,416$ N/m³.

(Bacc., Grenoble.)

1° Les deux pistons P et P′, dont les poids sont négligeables, ne portent aucune surcharge (*fig.* 1).

L'équilibre du système est réalisé lorsque la pression de part et d'autre du piston P est la même. Cette pression est la pression atmosphérique du moment, p_0. La pression de l'air en A est $p_A = p_0$.

Cette même pression p_0 s'exerce sur le piston P′, donc sur B; par suite

$$p_B = p_0.$$

Les points A et B des deux surfaces du mercure sont soumis à la même pression, p_0. Ils appartiennent à une même surface isobare, laquelle est horizontale conformément au principe fondamental de l'hydrostatique.

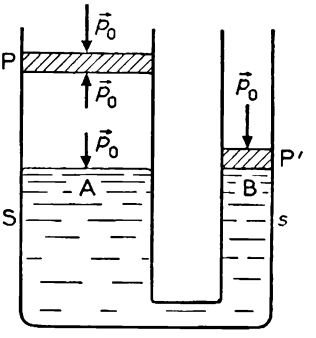


FIG. 1.

2° Après avoir chargé les pistons P et P′ avec des poids F et F′ les niveaux du mercure A et B doivent rester dans le même plan horizontal (*fig.* 2). La pression en A doit avoir la même valeur qu'en B.

$$p_A = p_B.$$

La pression de l'air au-dessus de A est $p_1 = p_A$.

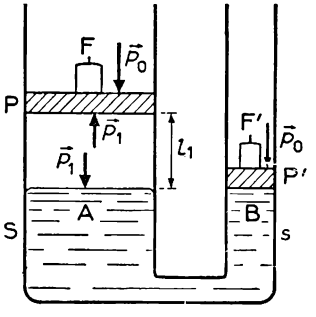


FIG. 2.

P est en équilibre sous l'action de trois forces verticales concourantes :

— la force exercée par la pression atmosphérique, $p_0 \times S$;

— le poids F;

— la force de sens inverse exercée par la pression intérieure, $p_1 \times S$.

La résultante de ces trois forces est nulle :

$$p_1 \times S = p_0 \times S + F,$$

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{S} = p_A.$$

La pression de l'air en B est égale à la pression atmosphérique p_0 augmentée de la pression exercée par F′, soit $\frac{F'}{s}$:

$$p_B = p_0 + \frac{F'}{s}.$$

Posons $p_A = p_B$.

$$p_0 + \frac{F}{S} = p_0 + \frac{F'}{s},$$

$$F = F' \times \frac{S}{s}.$$

La masse d'air isolé entre le piston P et le mercure est constante.
La température de cet air est, elle aussi, constante.
Dans l'état initial, l'air occupe un volume $v = S \times l$ sous la pression p.
Dans l'état final, il occupe un volume $v_1 = S \times l_1$ sous la pression p_1.
Appliquons lui la loi de Mariotte :

$$p_1 \times v_1 = p \times v,$$

$$\left(p_0 + \frac{F}{S}\right) \times S \times l_1 = p \times S \times l.$$

Cette relation nous permet de calculer l_1 nouvelle hauteur de l'air enfermé entre le piston P et le mercure :

$$l_1 = \frac{p}{p_0 + \frac{F}{S}} \times l.$$

Application numérique :

$F' = 50{,}03$ N; $S = 100$ cm², ou 0,010 m²; $s = 10$ cm², ou 0,001 m²; $p = 100\,062$ pascals; $p_0 = \rho_0 \times h_0 = 133\,416 \times 0{,}75 = 100\,062$ pascals; $l = 21$ cm, ou 0,21 m.

$$F = 50{,}03 \times \frac{0{,}010}{0{,}001} = 500{,}3 \text{ N}, \qquad \mathbf{F = 500\ N.}$$

$$l_1 = \frac{100\,062}{100\,062 + \frac{500{,}3}{0{,}010}} \times 0{,}21, \qquad \mathbf{l_1 = 0{,}14\ m.}$$

3° La température de l'appareil est portée à t °C; le poids F est supprimé sur le piston P tandis que le poids F′ est maintenu sur le piston P′. Un nouvel équilibre du système, dans lequel les deux niveaux du mercure ne sont plus dans le même plan (*fig.* 3), s'établit alors. La différence de pression entre les points B_1 et A_1, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique, a pour mesure le produit des nombres qui mesurent le poids volumique ρ et la distance verticale h qui sépare les deux points :

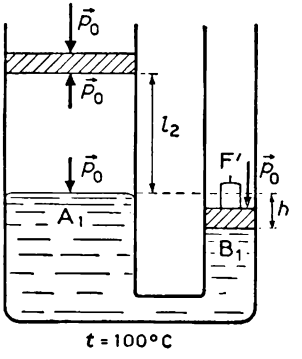


FIG. 3.

$$p_{B_1} - p_{A_1} = \rho \times h.$$

$$p_{A_1} = p_0, \qquad p_{B_1} = p_0 + \frac{F'}{s}.$$

D'autre part, le poids volumique ρ du mercure à t °C est égal au poids

volumique ρ_0 à 0 °C divisé par le binôme de dilatation absolue $(1 + mt)$.

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + mt},$$

$$p_0 + \frac{F'}{s} - p_0 = \frac{\rho_0}{1 + mt} \times h.$$

La distance des deux niveaux A_1 et B_1 est donc

$$h = \frac{F'}{s} \times \frac{1 + mt}{\rho_0}.$$

L'air enfermé sous le piston P, qui ne porte plus de surcharge, a une masse constante. Dans un premier état, il occupe un volume $v = S \times l$, sous une pression p, à la température t_0 °C. Dans un deuxième état, il occupe un volume $v_2 = S \times l_2$, sous la pression p_0, à la température t °C.

L'équation des gaz parfaits lui est applicable :

$$\frac{p_0 \times v_2}{1 + \alpha t} = \frac{p \times v}{1 + \alpha t_0}.$$

$$\frac{p_0 \times S \times l_2}{1 + \alpha t} = \frac{p \times S \times l}{1 + \alpha t_0}.$$

Cette relation nous permet de calculer la nouvelle hauteur de l'air enfermé entre le piston P et le mercure :

$$l_2 = \frac{p}{p_0} \times \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \times l.$$

Application numérique :

$$F' = 50{,}03 \text{ N}; \quad s = 0{,}001 \text{ m}^2;$$

$$\rho_0 = 133\,416 \text{ N/m}^3; \quad m = 0{,}000\,18; \quad p = 100\,062 \text{ pascals};$$

$p_0 = 100\,062$ pascals; $1 + \alpha t = 1 + \frac{100}{273} = \frac{373}{273}$; $1 + \alpha t_0 = 1 + \frac{0}{273} = 1$;

$l = 21$ cm, ou 0,21 m.

$$h = \frac{50{,}03}{0{,}001} \times \frac{1 + 0{,}000\,18 \times 100}{133\,416}, \qquad \boldsymbol{h = 0{,}382 \text{ m},}$$

$$l_2 = \frac{100\,062}{100\,062} \times \frac{\frac{373}{273}}{1} \times 0{,}21, \qquad \boldsymbol{l_2 = 0{,}287 \text{ m}.}$$

CHAPITRE XVIII

Masse volumique et densité des gaz.

73. — Masse d'un gaz contenu dans un récipient de volume donné.

Un récipient indilatable de 10 litres est muni d'un robinet, R, qui permet de le faire communiquer avec l'atmosphère.

1° R étant fermé, le récipient renferme de l'air à 0 °C, sous la pression de 114 cm de mercure. Quelle est la masse de l'air contenu dans le récipient?

2° R restant fermé, on chauffe le récipient à 100 °C. Quelle est la pression de l'air dans le récipient?

3° On ouvre R, l'ensemble étant maintenu à 100 °C. Quelle est la masse d'air qui reste dans le récipient?

4° On ferme R et l'on ramène l'ensemble à 0 °C. Quelle est la pression de l'air dans le récipient?

Masse volumique de l'air à 0 °C et sous la pression normale : 1,3 g par litre. Pression atmosphérique extérieure : 76 cm de mercure.

(Bacc., Clermont.)

1° L'air du récipient occupe le volume v à la température 0 °C et sous la pression p. Sa masse m est égale au produit de sa masse volumique a, dans ces mêmes conditions, par le volume v :

$$m = a \times v. \tag{1}$$

a s'obtient à partir de a_0, masse volumique de l'air dans les conditions normales : 0 °C, pression p_0. Il résulte de la loi de Mariotte que la masse volumique d'un gaz est, à température constante, proportionnelle à sa pression :

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Portons dans (1) la valeur de a :

$$a = a_0 \times \frac{p}{p_0};$$

$$m = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times v.$$

Application numérique :

$$a_0 = 1{,}3 \text{ g/l}; \; p = 114 \text{ cm Hg}; \; p_0 = 76 \text{ cm Hg}; \; v = 10 \text{ l}.$$

$$m = 1{,}3 \times \frac{114}{76} \times 10,$$

$$\boldsymbol{m = 19{,}5 \text{ g}.}$$

2° Quand on porte le récipient de la température 0 °C à la température t °C la pression de l'air passe de la valeur p à la valeur p' sans variation de volume ni de masse. Nous pouvons, en appliquant la loi de Charles, calculer la nouvelle pression p' :

$$p' = p(1 + \beta t).$$

Application numérique :

$$p = 114 \text{ cm Hg}; \; \beta = \frac{1}{273}; \; t = 100 \text{ °C}.$$

$$p' = 114\left(1 + \frac{100}{273}\right) = 114 \times \frac{373}{273} = 155{,}7 \text{ cm de mercure},$$

$$\boldsymbol{p' = 156 \text{ cm de mercure}.}$$

3° Lorsqu'on ouvre le robinet R la pression de l'air dans le récipient est la pression extérieure égale à la pression normale p_0.

La masse de l'air contenu dans le récipient et qui occupe le volume v à la température t °C et sous la pression p_0 est

$$m' = a' \times v,$$

a' désignant la masse volumique de l'air dans les conditions t °C, p_0.

a' se calcule à partir de a_0, masse volumique de l'air dans les conditions normales, en appliquant la loi de Gay-Lussac.

La masse m d'air qui occupe le volume v_0 à 0 °C et sous la pression normale p_0, occupe à t_0 C sous la même pression normale, p_0, un volume v donné par la loi de Gay-Lussac :

$$v = v_0(1 + \alpha t).$$

La masse volumique de l'air est donc :

à 0°C $\qquad a_0 = \dfrac{m}{v_0},$

à t °C $\qquad a' = \dfrac{m}{v} = \dfrac{m}{v_0(1 + \alpha t)}.$

Remplaçons dans cette expression $\dfrac{m}{v_0}$ par sa valeur a_0. Nous obtenons

$$a' = \frac{a_0}{1 + \alpha t}$$

et, par suite, $\qquad m' = \dfrac{a_0}{1 + \alpha t} \times v.$

Application numérique :

$$a_0 = 1{,}3 \text{ g/l}; \ \alpha = \frac{1}{273}; \ t = 100 \text{ °C}; \ l = 10 \text{ l}.$$

$$m' = \frac{1{,}3}{1 + \frac{100}{273}} \times 10 = 1{,}3 \times \frac{273}{373} \times 10.$$

$$\boldsymbol{m' = 9{,}51 \text{ g}.}$$

4° Le robinet R étant refermé, l'air contenu dans le récipient a une masse constante, m', et un volume constant, v.

Si l'on ramène la température de cet air de t °C à 0 °C, la pression passe de la valeur p_0 à la valeur p''. Pour avoir p'', nous appliquons la loi de Charles :

$$p_0 = p''(1 + \beta t).$$

$$p'' = \frac{p_0}{1 + \beta t}.$$

Application numérique :

$$p_0 = 76 \text{ cm Hg}; \ \beta = \frac{1}{273}; \ t = 100 \text{ °C}.$$

$$p'' = \frac{76}{1 + \frac{100}{273}} = 76 \times \frac{273}{373},$$

$$\boldsymbol{p'' = 55{,}6 \text{ cm de mercure}.}$$

74. — Volume occupé par une masse donnée de gaz.

1° Déterminer le volume que prendrait à 200 °C, sous une pression de 5 atmosphères, une masse d'air sec qui occupe à 40 °C sous la pression de 2 atmosphères un volume de 1 litre.

2° Quel serait le volume occupé par cette même masse d'air à 0 °C sous la pression atmosphérique normale? Exprimer en grammes la valeur de cette masse d'air.

3° Dans quelles proportions, en volumes, faudrait-il mélanger de l'air et de l'hydrogène, pris dans les conditions normales, pour que 1 litre du mélange à 273 °C et sous la pression de 2 atmosphères ait une masse de 1 g?

On sait que la masse du litre d'air dans les conditions normales est 1,293 g et que la densité de l'hydrogène par rapport à l'air est 0,069.

(Bacc., Lyon.)

Pour résoudre ce problème, il est commode d'utiliser une autre forme de l'équation caractéristique des gaz parfaits.

Dans l'équation,

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = \frac{p'v'}{1+\alpha t'};$$

nous pouvons poser en effet

$$1+\alpha t = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}+t\right) = \alpha T \qquad \text{et} \qquad 1+\alpha t' = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}+t'\right) = \alpha T'.$$

Cette équation prend alors la forme plus simple

$$\frac{pv}{T} = \frac{p'v'}{T'}.$$

La grandeur T définie par l'expression

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273 + t$$

est appelée température absolue du gaz. Elle s'exprime en degrés Kelvin (°K) au lieu de s'exprimer en degrés Celsius (°C).

C'est ainsi que la température normale $t_0 = 0$ °C correspond à la température absolue $T_0 = 273$ °K.

1° Le volume cherché s'obtient à partir de l'équation des gaz parfaits puisque la masse d'air est constante.

Pour la masse m d'air sec, les conditions initiales sont :

volume v, température absolue T, pression p;

et les conditions finales,

volume v', température absolue T', pression p'.

L'équation des gaz parfaits s'écrit, dans ce cas,

$$\frac{p \times v}{T} = \frac{p' \times v'}{T'}.$$

Elle nous permet de calculer v' :

$$v' = v \times \frac{p}{p'} \times \frac{T'}{T}.$$

Application numérique :

$v = 1$ litre; $p = 2$ atmosphères; $p' = 5$ atmosphères;

$T = 273 + 40 = 313$ °K; $T' = 273 + 200 = 473$ °K.

$$v = 1 \times \frac{2}{5} \times \frac{473}{313} \text{ litre},$$

$$\boldsymbol{v = 0{,}604 \text{ litre.}}$$

2° Le volume v_0 occupé par cette masse d'air dans les conditions normales (température absolue T_0, pression p_0) est donné par la même formule, en partant des mêmes conditions initiales :

$$\frac{p \times v}{T} = \frac{p_0 \times v_0}{T_0},$$

$$v_0 = v \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}.$$

La masse d'air considérée, m, est égale au produit de la masse volumique dans les conditions normales, a_0, par le volume, v_0, pris dans ces mêmes conditions normales :

$$m = a_0 \times v_0.$$

Si l'on veut obtenir la masse en grammes on prendra a_0 en grammes par litre et v_0 en litres.

Application numérique :

$v = 1$ litre; $p = 2$ atmosphères; $p_0 = 1$ atmosphère.

$T = 273 + 40 = 313$ °K; $T_0 = 273 + 0 = 273$ °K; $a_0 = 1{,}293$ g/l.

$$v_0 = 1 \times \frac{2}{1} \times \frac{273}{313} = 1{,}744 \text{ litre,}$$

$$\mathbf{v_0 = 1{,}74 \text{ litre.}}$$

$$m = 1{,}293 \times 1{,}744, = 2{,}255 \text{ g,}$$

$$\mathbf{m = 2{,}26 \text{ g.}}$$

3° Désignons par x et y les volumes d'air et d'hydrogène pris dans les conditions normales et dont la masse totale donnée, m_0, occupe un volume donné, v, dans des conditions de température et de pression données, T °K et p atmosphères.

Calculons le volume, v_0, de cette masse m_0 de mélange, dans les conditions normales T_0 °K et p_0 atmosphères, en appliquant la formule des gaz parfaits :

$$\frac{p \times v}{T} = \frac{p_0 \times v_0}{T_0},$$

$$v_0 = v \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}.$$

Nous disposons de deux équations pour calculer x et y.

La première exprime la composition en volumes :

(1) $$x + y = v_0.$$

La deuxième exprime la composition en masses. La masse d'air étant $a_0 \times x$, celle de l'hydrogène, $d \times a_0 \times y$, la masse totale est m_0 :

(2) $$a_0 \times x + d \times a_0 \times y = m_0.$$

Nous pourrions donc résoudre le système par rapport à x et y et calculer le rapport demandé, $\frac{x}{y}$.

Mais nous pouvons aussi calculer directement ce rapport.

(1) et (2) peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{v_0} \times \frac{x}{y} + \frac{1}{v_0} = \frac{1}{y},$$

$$\frac{a_0}{m_0} \times \frac{x}{y} + \frac{d \times a_0}{m_0} = \frac{1}{y}.$$

De ces deux équations nous éliminons $\frac{1}{y}$:

$$\frac{a_0}{m_0} \times \frac{x}{y} + \frac{d \times a_0}{m_0} = \frac{1}{v_0} \times \frac{x}{y} + \frac{1}{v_0},$$

$$\left(\frac{a_0}{m_0} - \frac{1}{v_0}\right)\frac{x}{y} = \frac{1}{v_0} - \frac{d \times a_0}{m_0},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m_0 - d \times a_0 \times v_0}{a_0 \times v_0 - m_0}.$$

Application numérique :

$m_0 = 1$ gramme; $d = 0{,}069$; $a_0 = 1{,}293$ g/l; $v = 1$ l;

$T = 273 + 273 = 546$ °K; $T_0 = 273 + 0 = 273$ °K;

$p = 2$ atmosphères; $p_0 = 1$ atmosphère.

$$v_0 = 1 \times \frac{2}{1} \times \frac{273}{546} = 1 \text{ litre};$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - 0{,}069 \times 1{,}293 \times 1}{1{,}293 \times 1 - 1} = \frac{1 - 0{,}089\,217}{0{,}293} = 3{,}108,$$

$$\frac{x}{y} = \mathbf{3{,}11}.$$

75. — Masse d'un gaz contenu dans un tube barométrique.

Dans tout le problème, la pression atmosphérique est supposée constante et égale à 75 cm de mercure.

Un tube de verre de section constante 1 cm³ fermé à son extrémité supérieure est disposé sur une cuve à mercure à niveau constant et fixé de façon que la portion émergente du tube ait 1 m de hauteur. Dans ces conditions, la hauteur du mercure dans le tube se fixe à $h = 25$ cm au-dessus du niveau de la cuve.

1° Quelle est, en centimètres de mercure, la pression du gaz contenu dans le tube?

2° En supposant que ce gaz soit de l'air, quelle en est la masse enfermé dans le tube?

Masse de 1 litre d'air à 0 °C, sous 76 cm de mercure : 1,3 g; température du tube : 20 °C.

3° Même question en supposant que c'est de l'hydrogène qui est enfermé au-dessus du mercure. Densité de l'hydrogène par rapport à l'air : $d = 0{,}07$.

4° Le tube est porté à 100 °C. Quelle est la nouvelle hauteur du mercure au-dessus de la cuve? On négligera la dilatation du verre et celle du mercure.

Coefficient de dilatation du gaz, supposé parfait, sous pression constante : $\alpha = \frac{1}{273}$. *(Bacc., Toulouse.)*

1° Soit p la pression du gaz à l'intérieur du tube (*fig.* 1). La différence de pression entre les points B et A pris dans le mercure est, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique, mesurée par le produit des nombres qui mesurent le poids volumique, ϖ, du mercure et la distance verticale h séparant les points A et B :

$$p_B - p_A = \varpi \times h.$$

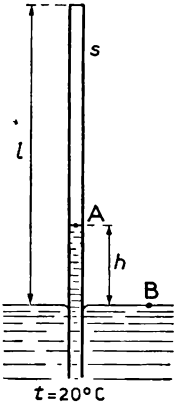


FIG. 1.

p_B peut être exprimée en fonction de la hauteur barométrique H :

$$p_B = \varpi \times H.$$

$p_A = p$ pression du gaz à l'intérieur du tube :

$$\varpi \times H - p = \varpi \times h,$$
$$p = \varpi (H - h).$$

Application numérique :

$$H = 75 \text{ cm}, \qquad h = 25 \text{ cm}.$$
$$p = \varpi (75 - 25) = \varpi \times 50,$$
$$\mathbf{p = 50 \text{ cm de mercure}}.$$

2° Le tube contient un volume v d'air, sous la pression $p = 50$ cm de mercure et à la température $t = 20$ °C. Si a désigne la masse volumique du gaz, dans ces conditions de température et de pression, la masse du gaz est

$$m = a \times v.$$

Si le gaz se trouvait dans les conditions normales (pression $p_0 = 76$ cm de mercure, température $t_0 = 0$ °C, masse volumique a_0), il occuperait un volume v_0 et l'on aurait

$$m = a_0 \times v_0.$$

On en déduit

$$a \times v = a_0 \times v_0, \qquad \text{d'où} \qquad a = a_0 \times \frac{v_0}{v}.$$

L'équation des gaz parfaits,

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = p_0 v_0,$$

nous donne le rapport $\frac{v_0}{v}$:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t}.$$

Il en résulte que

$$a = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

et, par suite,

$$m = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t} \times v_0.$$

Le volume du gaz étant $v = s(l - h)$, sa masse est donnee par l'expression

$$m = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t} \times s(l - h).$$

Application numérique :

$a_0 = 1{,}3$ g/dm³, ou 0,001 3 g/cm³, $p = 50$ cm de mercure, $p_0 = 76$ cm de mercure, $s = 1$ cm², $l - h = 100 - 25 = 75$ cm,

$$\frac{1}{1+\alpha t} = \frac{1}{1+\frac{20}{273}} = \frac{273}{293}.$$

$$m = 0{,}001\,3 \times \frac{50}{76} \times \frac{273}{293} \times 1 \times 75 = 0{,}059\,77 \text{ g}, \qquad \mathbf{m = 0{,}060\ g.}$$

3° La densité, d, d'un gaz par rapport à l'air est le rapport de la masse m' d'un volume v de gaz, pris dans des conditions de température et de pression t et p, à la masse m du même volume d'air pris dans ces mêmes conditions :

$$d = \frac{m'}{m}.$$

Le gaz est de l'hydrogène de densité d par rapport à l'air. La masse d'air prise dans les mêmes conditions est m. Ces deux nombres sont connus. On peut donc calculer m', masse d'hydrogène :

$$m' = m \times d.$$

Application numérique :

$$m = 0{,}059\,77 \text{ g}; \qquad d = 0{,}07.$$

$$m' = 0{,}059\,77 \times 0{,}07 = 0{,}004\,18 \text{ g}, \qquad \mathbf{m' = 0{,}004\,2\ g.}$$

4° Le tube étant porté à t °C le mercure s'élève dans le tube de la hauteur x (*fig.* 2). La masse du gaz n'a pas varié.

La pression p' du gaz est, d'après le raisonnement de la question 1° et en admettant que le poids volumique ϖ du mercure n'a pas varié,

$$p' = \varpi (H - x).$$

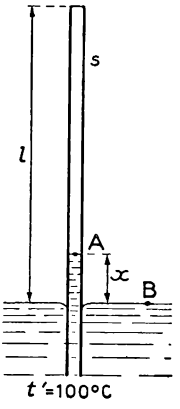


FIG. 2.

Son volume est, en admettant que le verre ne s'est pas dilaté,

$$v' = s (l - x).$$

Dans un premier état, le gaz occupe un volume $v = s (l - h)$ sous la pression $p = \varpi (H - h)$ à la température absolue $T = 273 + t$.

Dans un deuxième état, le gaz occupe un volume $v' = s (l - x)$ sous la pression $p' = \varpi (H - x)$ à la température absolue $T' = 273 + t'$.

L'équation des gaz parfaits lui est applicable

$$\frac{p' \times v'}{T'} = \frac{p \times v}{T},$$

$$\frac{\varpi (H - x) \times s (l - x)}{T'} = \frac{\varpi (H - h) \times s (l - h)}{T}.$$

Après simplification nous obtenons une équation du second degré en x :

$$x^2 - (H + l)\, x + H \times l - (H - h)(l - h) \times \frac{T'}{T} = 0.$$

Application numérique :

$$H = 75 \text{ cm}; \quad l = 100 \text{ cm}; \quad h = 25 \text{ cm};$$

$$T = 273 + 20 = 293 \text{ °K}; \quad T' = 273 + 100 = 373 \text{ °K}.$$

$$x^2 - 175\, x + 75 \times 100 - (75 - 25)(100 - 25) \times \frac{373}{293} = 0,$$

$$x^2 - 175\, x + 2\,726 = 0,$$

$$x = \frac{175 \pm \sqrt{175^2 - 4 \times 2\,726}}{2} = \frac{175 \pm \sqrt{19\,721}}{2},$$

$$x = \frac{175 \pm 140{,}4}{2}.$$

Les deux racines sont positives. Seule convient la racine inférieure à 100 :

$$x = \frac{175 - 140{,}4}{2} = \frac{34{,}6}{2},$$

$$\boldsymbol{x = 17{,}3 \text{ cm}.}$$

76. — Masse volumique d'un gaz à différentes températures.

Une certaine masse d'air occupe un volume de 2 litres sous la pression de 72 cm de mercure et à la température de 10 °C.

1° Le volume étant maintenu constant, on élève la température à 50 °C. Calculer la nouvelle pression.

2° Calculer la masse volumique de l'air dans les deux états précédents.

3° On laisse l'air se détendre à la température constante de 50 °C; quel sera son volume lorsqu'il se retrouvera à la pression initiale de 72 cm de mercure?

La masse du litre d'air à la température de 0 °C et sous la pression normale de 76 cm de mercure est 1,293 g.

(Bacc., Poitiers.)

1° La masse d'air considérée est constante.

Dans un premier état, elle occupe un volume v_1 sous une pression p_1 et à la température absolue $T_1 = 273 + t_1$.

Dans un second état, elle occupe un volume v_2 sous une pression p_2 et à la température absolue $T_2 = 273 + t_2$.

L'équation des gaz parfaits,

$$\frac{p_1 \times v_1}{T_1} = \frac{p_2 \times v_2}{T_2},$$

nous permet de calculer p_2 si nous connaissons les autres grandeurs :

$$p_2 = p_1 \times \frac{v_1}{v_2} \times \frac{T_2}{T_1}.$$

Si $v_2 = v_1$ l'expression précédente prend la forme simple

$$(1) \qquad p_2 = p_1 \times \frac{T_2}{T_1}.$$

Application numérique :

$p_1 = 72$ cm de mercure; $T_1 = 273 + 10 = 283$ °K; $T_2 = 273 + 50 = 323$ °K.

$$p_2 = 72 \times \frac{323}{283} = 82{,}17 \text{ cm de mercure}$$

$$\mathbf{p_2 = 82{,}2 \text{ cm de mercure.}}$$

2° La masse volumique de l'air est désignée par la lettre a.

Dans le premier état, elle a la valeur a_1. Dans le deuxième, la valeur a_2. Dans l'état normal, la valeur a_0.

$$a_1 = a_0 \times \frac{p_1}{p_0} \times \frac{T_0}{T_1},$$

$$a_2 = a_0 \times \frac{p_2}{p_0} \times \frac{T_0}{T_2},$$

Or, d'après la relation (1),

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}.$$

$$a_1 = a_2 = a_0 \times \frac{p_1}{p_0} \times \frac{T_0}{T_1}.$$

Ce résultat n'est pas surprenant. Dans les deux cas, la masse de l'air est la même et le volume est aussi le même.

Application numérique :

$$a_0 = 1{,}293 \text{ g/l}; \qquad p_1 = 72 \text{ cm de mercure};$$

p_0 (pression normale) = 76 cm de mercure; $T_1 = 273 + 10 = 283$ °K; T_0 (température absolue normale) = 273 °K.

$$a_1 = a_2 = 1{,}293 \times \frac{72}{76} \times \frac{273}{283} = 1{,}181 \text{ g/l}$$

$$\mathbf{a_1 = a_2 = 1{,}18 \text{ g/l}.}$$

3° L'air, dont la masse est constante et qui est maintenu à température constante, T_2, se détend de la pression p_2 à la pression initiale p_1. Dans ces nouvelles conditions, il occupe un volume v.

Calculons ce volume v en appliquant la formule des gaz parfaits.

Premier état : volume v_1, pression p_2, température absolue T_2.

Deuxième état : volume v, pression p_1, température absolue T_2.

La formule des gaz parfaits s'écrit, avec ces notations,

$$\frac{p_2 \times v_1}{T_2} = \frac{p_1 \times v}{T_2}.$$

Le volume v est donc

$$v = v_1 \times \frac{p_2}{p_1}.$$

Application numérique :

$v_1 = 2$ l; $p_1 = 72$ cm de mercure; $p_2 = 82{,}17$ cm de mercure.

$$v = 2 \times \frac{82{,}17}{72} = 2{,}282 \text{ l},$$

$$\mathbf{v = 2{,}28 \text{ l}.}$$

Remarque. — La question 1° pouvait être résolue en appliquant la loi de Charles. La question 3° pouvait l'être en appliquant la loi de Mariotte.

77. — Baroscope plongé dans un gaz dont la masse volumique varie.

Une enceinte contient de l'air à la température de 0 °C et à la pression $p_0 = 76$ cm de mercure. A l'intérieur est placée une balance, qui supporte à chaque extrémité des deux bras du fléau, supposés égaux, une sphère de volume invariable, la première de 4 cm³, la deuxième de 100 cm³. Une aiguille solidaire du fléau se déplace devant un cadran gradué. Quand le fléau est horizontal, l'aiguille est au zéro de la graduation.

1° On suppose l'équilibre ainsi réalisé. Quelle est la différence des masses des deux sphères?

2° Sachant qu'une surcharge de 1 mg placée sur l'une des sphères fait incliner le fléau d'une division et que celui-ci s'incline de deux divisions quand on comprime, à température constante, l'air à l'intérieur de l'enceinte, on demande quelle est alors la pression p à l'intérieur de l'enceinte.

3° Dans quel sens et de combien doit varier la température de l'enceinte sous la pression précédente pour que le fléau revienne à sa première position d'équilibre?

4° On remplace l'air par du gaz carbonique sous la pression p' à la température t'. Quelle relation doit-il exister entre p' et t' pour que l'équilibre horizontal du fléau soit réalisé? Quelle est, en particulier, la température si

$$p' = p_0 = 76 \text{ cm de mercure?}$$

Masse volumique de l'air normal : $a_0 = 1{,}3.10^{-3}$ g/cm³.
Densité du gaz carbonique par rapport à l'air : $d = 1{,}5$.

(Bacc. tech., Dijon.)

1° Le fléau de la balance est soumis à trois forces (*fig.* 1):

$\vec{F}$, poids apparent de la sphère S, appliquée en A à la distance OA de l'axe;

$\vec{F'}$, poids apparent de la sphère S', appliquée en B à la distance OB de l'axe;

$\vec{f}$, poids apparent du fléau, appliqué au centre de gravité G du fléau, sur la normale à AB, à la distance OG de l'axe.

Il est en équilibre sous l'action de ces trois forces quand la somme algébrique des moments de ces trois forces par rapport à l'axe est nulle.

Le moment de $\vec{f}$ par rapport à O, est nul puisque $\vec{f}$ passe par O.

$\vec{F}$ et $\vec{F'}$ étant verticales et le fléau AOB horizontal, la condition des moments s'écrit

$$F \times OA - F' \times OB = 0,$$

ou, comme OA = OB,

$$F = F'.$$

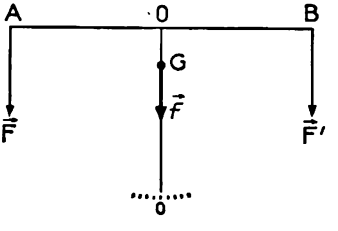


FIG. 1.

L'air de l'enceinte, étant à la température $t_0 = 0°$ C et sous la pression $p_0 = 76$ cm de mercure, est dans les conditions normales de température et de pression; sa masse volumique est a_0.

Le poids apparent de S est, en désignant par m sa masse et par v son volume,

$$(1) \qquad F = m \times g - a_0 \times v \times g.$$

De même, le poids apparent de S' est, en désignant par m' sa masse et par v' son volume,

$$(2) \qquad F' = m' \times g - a_0 \times v' \times g.$$

La condition $F = F'$ se traduit par la relation

$$(3) \qquad m \times g - a_0 \times v \times g = m' \times g - a_0 \times v' \times g.$$

Après simplification, nous obtenons la différence de masse des deux sphères :

$$(4) \qquad m' - m = a_0(v' - v).$$

Application numérique :

$a_0 = 1{,}3 \times 10^{-3}$ g/cm³; $v = 4$ cm³; $v' = 100$ cm³.

$$m' - m = 1{,}3 \times 10^{-3}(100 - 4) = 1{,}3 \times 96 \times 10^{-3} = 0{,}124\,8 \text{ g}$$

$$m' - m = 0{,}125 \text{ g}.$$

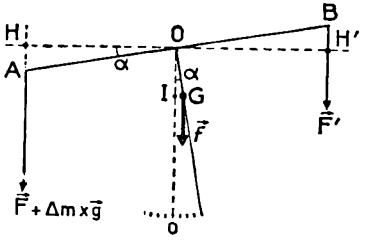


FIG. 2.

2° Une surcharge $\Delta m \times \vec{g}$ appliquée en A provoque l'inclinaison du fléau d'un petit angle α (*fig.* 2).

Il n'y a pas lieu de tenir compte de la poussée d'Archimède sur cette surcharge. Cette poussée n'en représente en effet que la $\frac{1}{1\,000}$ partie environ.

Pour traduire ce nouvel état d'équilibre, appliquons le théorème des moments :

$$(F + \Delta m \times g)\,OH - f \times IG - F' \times OH' = 0,$$

$$(F + \Delta m \times g)\,OA \times \cos\alpha - f \times OG \times \sin\alpha - F' \times OB \times \cos\alpha = 0.$$

Posons OA = OB et divisons par $OA \times \cos\alpha$:

$$\Delta m \times g + (F - F') = f \times \frac{OG}{OA} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

La condition $F = F'$ étant satisfaite, puisque la masse volumique de l'air n'a pas varié, il reste

$$\Delta m \times g = f \times \frac{OG}{OA} \times \operatorname{tg}\alpha \approx f \times \frac{OG}{OA} \times \alpha.$$

La surcharge $\Delta m \times g$ étant supprimée, si l'on modifie la pression de l'air on modifie sa masse volumique, qui devient a. Nous admettrons que cette modification n'affecte que les poids apparents des deux sphères, qui deviennent F_1 et F_1', et non celui du fléau, dont le volume est peu important. Il en résulte un nouvel état d'équilibre, caractérisé par une inclinaison 2α du fléau et pour lequel le théorème des moments est satisfait :

$$F_1 \times OA \times \cos 2\alpha - f \times OG \times \sin 2\alpha - F'_1 \times OB \times \cos 2\alpha = 0,$$

$$F_1 - F'_1 = f \times \frac{OG}{OA} \times \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = f \times \frac{OG}{OA} \times \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Remplaçons F_1 et F_1' par leurs nouvelles valeurs obtenues en remplaçant a_0 par a dans les expressions (1) et (2) et posons $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$:

$$(m \times g - a \times v \times g) - (m' \times g - a \times v' \times g) = f \times \frac{OG}{OA} \times 2\alpha.$$

D'autre part, nous avons trouvé la relation

$$f \times \frac{OG}{OA} \times \alpha = \Delta m \times g.$$

Le théorème des moments prend, après simplification, la forme suivante :

$$(m - m') + a(v' - v) = 2 \times \Delta m.$$

Si l'on tient compte de la relation (2),

$$-a_0(v' - v) + a(v' - v) = 2\Delta m,$$

$$a - a_0 = 2 \times \frac{\Delta m}{v' - v}.$$

Nous connaissons l'expression de la masse volumique de l'air en fonction de la pression à température constante :

$$a = a_0 \times \frac{p}{p_0}.$$

Portons cette expression dans la précédente :

$$a_0 \times \frac{p}{p_0} - a_0 = 2 \times \frac{\Delta m}{v' - v}.$$

Nous pouvons alors calculer p :

$$p = p_0 + 2p_0 \times \frac{\Delta m}{a_0(v' - v)}. \qquad (5)$$

Application numérique :

$$p_0 = 76 \text{ cm de mercure}; \qquad \Delta m = 0{,}001 \text{ g},$$

$$a_0 = 1{,}3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3; \qquad v' - v = 100 - 4 = 96 \text{ cm}^3.$$

$$p = 76 + 2 \times 76 \times \frac{0{,}001}{1{,}3 \times 10^{-3} \times 96},$$

$$p = 76 + \frac{2 \times 76}{1{,}3 \times 96},$$

$$\boldsymbol{p = 77\,2 \text{ cm de mercure.}}$$

3° Pour ramener le fléau à sa position d'équilibre horizontale, il faut modifier la masse volumique de l'air de manière à réaliser la condition d'équilibre du premier paragraphe : égalité des poids apparents. Si a' est la nouvelle masse volumique de l'air il faut écrire

$$(6) \qquad m \times g - a' \times v \times g = m' \times g - a' \times v' \times g.$$

Si l'on compare cette relation à (4) on voit qu'il faut poser

$$a' = a_0.$$

Nous connaissons l'expression de la masse volumique de l'air sous la pression p et à la température t (problème n° 75) :

$$a' = a_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

Si $a' = a_0$, la relation devient

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \alpha t,$$

d'où nous tirons

$$t = \frac{p - p_0}{\alpha p_0}.$$

Puisque $p > p_0$, la température t est supérieure à 0 °C.

Application numérique :

$$p_0 = 76 \text{ cm de mercure}, \qquad p = 77{,}2 \text{ cm de mercure}$$

$$\alpha = \frac{1}{273}, \qquad t = 273 \times \frac{77{,}2 - 76}{76},$$

$$\boldsymbol{t = 4{,}3 \text{ °C.}}$$

4° On remplace l'air par du gaz carbonique sous la pression p' et à la température t'.

La masse volumique de l'air dans ces conditions de température et de pression est

$$a'' = a_0 \times \frac{p'}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t'}$$

et la masse volumique du gaz est

$$\mu = a'' \times d = a_0 \times \frac{p'}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t'} \times d.$$

Si l'on veut que le fléau soit encore en équilibre dans sa position horizontale, il faut, d'après un raisonnement analogue au précédent, que la masse volumique μ du gaz carbonique soit égale à la masse volumique a_0 de l'air dans les conditions normales.

Si $\mu = a_0$, l'expression précédente devient

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{1 + \alpha t'}{d}.$$

Si nous avons, de plus, $p' = p_0$, cette relation se réduit à

$$\frac{1 + \alpha t'}{d} = 1,$$

d'où nous tirons

$$t' = \frac{d - 1}{\alpha}.$$

Application numérique :

$$d = 1{,}5, \qquad \alpha = \frac{1}{273}.$$

$$t' = (1{,}5 - 1)\ 273 = 136{,}5.$$

$$t' = 136\ ^\circ\text{C}.$$

CHAPITRE XIX

Calorimétrie.

78. — Mesure du pouvoir calorifique d'un combustible.

Pour mesurer le pouvoir calorifique (P. C.) d'un combustible solide, on place 1 g de celui-ci dans un récipient A hermétiquement clos, contenant assez d'oxygène pour sa combustion totale. A est immergé dans un calorimètre.

1° On utilise d'abord 1 g de naphtalène, dont le P. C. est 9 692 kilocalories par kg. On note la température du calorimètre :

a) avant la combustion du naphtalène : $\theta_0 = 18{,}3\ ^\circ C$;

b) après la combustion du naphtalène : $\theta_1 = 21{,}4\ ^\circ C$.

Quelle est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température du calorimètre et de son contenu?

2° On utilise ensuite 1 g de combustible étudié (houille). On note la température du calorimètre :

a) avant la combustion : $\theta_0 = 18{,}3\ ^\circ C$;

b) après la combustion : $\theta_2 = 20{,}8\ ^\circ C$.

Quel est le P. C. de la houille étudiée, en kilocalories par kilogramme de houille?

1° Soit μ la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température du calorimètre et de son contenu.

μ représente la capacité calorifique de l'appareil et s'exprime en calories par degré (cal. $^\circ C^{-1}$).

La combustion de m g de naphtalène dégage une quantité de chaleur Q_1 égale au produit du pouvoir calorifique q du combustible (évalué en cal/g) par sa masse :

$$Q_1 = q \times m \text{ calories.}$$

Ce dégagement de chaleur provoque une augmentation de la température du calorimètre et de son contenu (récipient A compris). Celle-ci passant de $\theta_0{}^\circ C$ à $\theta_1{}^\circ C$, la quantité de chaleur reçue par le calorimètre est

$$Q_2 = \mu(\theta_1 - \theta_0) \text{ calories.}$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, $Q_1 = Q_2$,

$$q \times m = \mu(\theta_1 - \theta_0).$$

Cette équation calorimétrique nous permet de calculer la capacité calorifique cherchée :

$$\mu = \frac{q \times m}{\theta_1 - \theta_0}.$$

Application numérique :

$$q = 9\,692 \text{ kcal/kg} = 9\,692 \text{ cal/g}, \quad m = 1 \text{ g},$$
$$\theta_0 = 18{,}3\ ^\circ\text{C}, \quad \theta = 21{,}4\ ^\circ\text{C}.$$
$$\mu = \frac{9\,692 \times 1}{21{,}4 - 18{,}3} = \frac{9\,692}{3{,}1} = 3\,126 \text{ cal. } ^\circ\text{C}^{-1},$$
$$\mu = \mathbf{3\,130 \text{ cal. } ^\circ\text{C}^{-1}}.$$

2° Si nous remplaçons la masse m g de naphtalène par une même masse de houille, de pouvoir calorifique inconnu x, la température du calorimètre croit de θ_0 °C à θ_2 °C. L'équation calorimétrique devient

$$x \times m = \mu(\theta_2 - \theta_0),$$

d'où nous tirons $\quad x = \frac{\mu}{m}(\theta_2 - \theta_0) = q\frac{(\theta_2 - \theta_0)}{\theta_1 - \theta_0}.$

Application numérique :

$$q = 9\,692 \text{ cal/g}, \quad \theta_2 - \theta_0 = 20{,}8 - 18{,}3 = 2{,}5\ ^\circ\text{C},$$
$$\theta_1 - \theta_0 = 3{,}1\ ^\circ\text{C}.$$
$$x = 9\,692 \times \frac{2{,}5}{3{,}1} = 7\,816 \text{ cal/g},$$
$$\mathbf{x = 7\,800 \text{ kcal/kg}}.$$

Ce nombre est légèrement inférieur au pouvoir calorifique du carbone pur. Nous savons que la combustion d'un atome-gramme de celui-ci dégage une quantité de chaleur de 96 kcal. Le pouvoir calorifique du carbone pur est donc égal à $\frac{96 \times 1\,000}{12} = 8\,000$ calories par gramme, ou 8 000 kcal/kg.

79. — Mesure de la chaleur massique d'un solide.

1° Dans un calorimètre de Berthelot, à la température ambiante de 15,5 °C, on verse 90 cm³ d'eau tiède à 25 °C. La température d'équilibre est 24,5 °C. Calculer la valeur en eau du calorimètre.

2° Immédiatement après, on plonge dans le calorimètre 125 g de platine sortant d'une étuve à 103,7 °C. La nouvelle température d'équilibre est 27,7 °C. Calculer la chaleur massique du platine.

3° On ajoute ensuite 23 cm³ d'eau prise à la température ambiante. Quelle est la nouvelle température d'équilibre?

(Bacc., Dijon.)

1° La valeur en eau, μ, du calorimètre est, par définition, la masse d'eau qui absorbe la même quantité de chaleur que le calorimètre pour une même élévation de température.

Le calorimètre est à la température ambiante t_0. On y verse m g d'eau à la température t_1. Après agitation, le calorimètre et l'eau sont en équilibre thermique. La température de l'ensemble est t_2.

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, la quantité de chaleur cédée par l'eau est égale à la quantité de chaleur reçue par le calorimètre.

La chaleur massique de l'eau au voisinage de 15 °C étant égale à 1 cal.g^{-1}.°C^{-1}, la capacité calorifique des m g d'eau est

$$1 \times m = m \text{ cal.}^{\circ}C^{-1}.$$

La quantité de chaleur cédée par l'eau est

$$Q_1 = 1 \times m(t_1 - t_2) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur reçue par le calorimètre est

$$Q_2 = 1 \times \mu(t_2 - t_0) \text{ calories,}$$

d'où

$$m(t_1 - t_2) = \mu(t_2 - t_0).$$

Cette relation fournit la valeur en eau cherchée :

$$\mu = m \times \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_0}.$$

Application numérique :

$m = 90$ grammes, $t_0 = 15{,}5$ °C, $t_1 = 25$ °C, $t_2 = 24{,}5$ °C.

$$\mu = 90 \times \frac{25 - 24{,}5}{24{,}5 - 15{,}5},$$

$$\mu = 5 \text{ grammes.}$$

2° On plonge dans le calorimètre, à la température t_2, une masse M g de platine de chaleur massique inconnue C, sortant d'une étuve à la température t_1'. La nouvelle température d'équilibre est t_2'.

Le morceau de platine cède au calorimètre une quantité de chaleur

$$Q_1 = C \times M(t_1' - t_2') \text{ calories.}$$

Le calorimètre reçoit une quantité de chaleur

$$Q_2 = 1 \times (m + \mu)(t_2' - t_2) \text{ calories.}$$

Nous obtiendrons l'équation calorimétrique qui nous permettra de calculer C en écrivant

$$Q_1 = Q_2,$$

$$C \times M(t_1' - t_2') = 1 \times (m + \mu)(t_2' - t_2).$$

On déduit de cette équation

$$C = 1 \times \frac{m + \mu}{M} \times \frac{t_2' - t_2}{t_1' - t_2'}.$$

Application numérique :

$$m + \mu = 90 + 5 = 95 \text{ grammes}, \qquad M = 125 \text{ g},$$
$$t_2 = 24{,}5\ ^\circ\text{C}, \qquad t_1' = 103{,}7\ ^\circ\text{C}, \qquad t_2' = 27{,}7\ ^\circ\text{C}.$$
$$C = 1 \times \frac{95}{125} \times \frac{27{,}7 - 24{,}5}{103{,}7 - 27{,}7} = \frac{19}{25} \times \frac{3{,}2}{76},$$
$$\mathbf{C = 0{,}032\ cal.g^{-1}.{}^\circ C^{-1}}.$$

3° On ajoute ensuite au calorimètre, à la température t_2', une masse m' g d'eau à la température ambiante t_0. La nouvelle température d'équilibre est t_3.

Le calorimètre cède à la masse m' d'eau une quantité de chaleur

$$Q_1 = 1 \times [(m + \mu) + CM]\ (t_2' - t_3) \text{ calories}.$$

La capacité calorifique de la masse m' g d'eau étant égale à

$$1 \times m' \text{ cal.}{}^\circ C^{-1},$$

la masse m' g d'eau reçoit une quantité de chaleur

$$Q_2 = 1 \times m'(t_3 - t_0) \text{ calories}.$$

Nous obtiendrons l'équation calorimétrique qui nous permettra de calculer t_3 en écrivant

$$Q_1 = Q_2,$$
$$[1 \times (m + \mu) + CM]\ (t_2' - t_3) = m'(t_3 - t_0).$$

Application numérique :

$$1 \times (m + \mu) + CM = 95 + 0{,}032 \times 125 = 99 \text{ cal.}{}^\circ C^{-1},$$
$$1 \times m' = 23 \text{ cal.}{}^\circ C^{-1}, \qquad t_0 = 15{,}5\ ^\circ\text{C}, \qquad t_2' = 27{,}7\ ^\circ\text{C}.$$
$$99\ (27{,}7 - t_3) = 23\ (t_3 - 15{,}5),$$
$$122\ t_3 = 99 \times 27{,}7 + 23 \times 15{,}5,$$
$$\mathbf{t_3 = 25{,}4\ ^\circ C}.$$

80. — Mesure de la chaleur massique d'un liquide.

Dans un flacon de verre de masse 80 g, on chauffe 100 g d'alcool à la température de 75 °C et l'on plonge le système dans un calorimètre dont la valeur en eau est 1 200 g. La température de ce calorimètre s'élève de 10 °C à 13,85 °C. Ayant retiré le flacon, on y ajoute 50 g d'alcool, on le porte de nouveau à 75 °C, puis on le plonge dans le même calorimètre, dont la température s'élève alors de 12 °C à 17,13 °C. Calculer les chaleurs massiques respectives du verre et de l'alcool.

(Bacc., Lyon.)

Soient x et y les chaleurs massiques du verre et de l'alcool. Ces grandeurs peuvent être déterminées en écrivant les équations calorimétriques correspondant aux deux expériences.

1re *Expérience.*

Le flacon de masse m g et contenant une masse m_1 g d'alcool est porté à la température t_0°C.

Il est ensuite plongé dans un calorimètre dont la valeur en eau est M grammes et la température initiale t_1°C.

La température finale du calorimètre est t_2°C.

La quantité de chaleur perdue par le flacon et l'alcool est

$$Q_1 = (x \times m + y \times m_1)(t_0 - t_2) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur gagnée par l'eau est

$$Q_2 = C_0 \times M(t_2 - t_1) \text{ calories,}$$

C_0 désignant la chaleur massique de l'eau. L'équation calorimétrique est

(1) $$(x \times m + y \times m_1)(t_0 - t_2) = C_0 \times M(t_2 - t_1).$$

2e *Expérience.*

On ajoute dans le flacon une masse m_2 g d'alcool et on porte le flacon à la température t_0°C.

Il est ensuite plongé dans le calorimètre dont la température initiale est t_1' °C.

La température finale du calorimètre est t_2' °C.

L'équation calorimétrique devient

(2) $$[x \times m + y(m_1 + m_2)](t_0 - t_2') = C_0 \times M(t_2 - t_1').$$

Nous avons un système de deux équations à deux inconnues, qui nous permet de calculer x et y.

Application numérique :

$$C_0 = 1 \text{ cal.g}^{-1}.\text{°C}^{-1},\ M = 1\,200 \text{ g},$$

$$m = 80 \text{ g},\ t_0 = 75 \text{ °C},\ m_1 = 100 \text{ g},\ t_1 = 10 \text{ °C},\ t_2 = 13{,}85 \text{ °C},$$

$$m_2 = 50 \text{ g},\ t_1' = 12 \text{ °C},\ t_2' = 17{,}13 \text{ °C}.$$

Le système formé par les deux équations calorimétriques est le suivant :

$$\begin{cases} (80\,x + 100\,y)(75 - 13{,}85) = 1 \times 1\,200\,(13{,}85 - 10), \\ (80\,x + 150\,y)(75 - 17{,}13) = 1 \times 1\,200\,(17{,}13 - 12). \end{cases}$$

Simplifions :

$$\begin{cases} 80\,x + 100\,y = \dfrac{1\,200 \times 3{,}85}{61{,}15}, \\ 80\,x + 150\,y = \dfrac{1\,200 \times 5{,}13}{57{,}87}. \end{cases}$$

Par soustraction, nous obtenons

$$50\,y = 1\,200\left(\frac{5{,}13}{57{,}87} - \frac{3{,}85}{61{,}15}\right),$$

$$y = \frac{24 \times 90{,}9}{3\,538{,}75}, \qquad y = \mathbf{0{,}616\ cal.g^{-1}.{}^{\circ}C^{-1}}.$$

Portons cette valeur de y dans la première équation :

$$80\,x + 61{,}6 = \frac{1\,200 \times 3{,}85}{61{,}15},$$

$$80\,x + 61{,}6 = 75{,}5,$$

d'où

$$x = \frac{75{,}5 - 61{,}6}{80},$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}173\ cal.g^{-1}.{}^{\circ}C^{-1}}.$$

81. — Influence de la capacité calorifique du vase dans une mesure calorimétrique.

Pour connaître la température d'un four industriel, on y plonge un anneau de fer pesant 22,3 g. Au bout d'un certain temps, lorsqu'il a atteint la température du four, on le plonge rapidement dans un calorimètre contenant 450 g d'eau à 15 °C. Après agitation, la température de l'eau monte jusqu'à 22,5 °C.

1° On demande la température du four, sachant que la chaleur massique du fer à l'état solide est 0,114 cal.g^{-1}.°C^{-1}.

2° Voulant connaître la chaleur massique d'un liquide, on remplace l'eau du calorimètre par 100 g de ce liquide à la température ambiante de 15 °C. L'anneau de fer précédent, ayant été chauffé à 100 °C, est ensuite plongé dans le liquide, dont la température s'élève à 19,1 °C.

On demande cette chaleur massique.

3° On n'a tenu aucun compte, aux 1° et 2°, de la capacité calorifique du vase calorimétrique. En le supposant formé d'un récipient en cuivre pesant 200 g, de chaleur massique 0,1 cal.g^{-1}.°C^{-1}, refaire les calculs de la température du four et de la chaleur massique du liquide pour se rendre compte des erreurs précédemment commises, que l'on évaluera correctement.

On négligera la capacité calorifique du thermomètre et celle de l'agitateur ainsi que les pertes par rayonnement.

(Bacc., Rome.)

1° Soit t la température du four. L'anneau de fer de masse m g, préalablement introduit dans le four, est plongé ensuite dans le calorimètre contenant M g d'eau à la température t_1. Après agitation, le calorimètre prend une température d'équilibre t_2. Si c est la chaleur massique du fer, la quantité de chaleur perdue par l'anneau est

$$Q_1 = cm(t - t_2) \text{ calories.}$$

Si nous désignons par c_0 la chaleur massique de l'eau, la quantité de chaleur gagnée par l'eau est

$$Q_2 = c_0 M(t_2 - t_1) \text{ calories.}$$

Écrivons que ces quantités de chaleur sont égales :

(1) $$cm(t - t_2) = c_0 M(t_2 - t_1).$$

Nous en déduisons

$$t = t_2 + \frac{c_0 M}{cm}(t_2 - t_1).$$

Application numérique :

$$c = 0{,}114 \text{ cal.g}^{-1}.{}^\circ\text{C}^{-1}, \qquad c_0 = 1 \text{ cal.g}^{-1}.{}^\circ\text{C}^{-1},$$
$$m = 22{,}3 \text{ g}, \quad M = 450 \text{ g}, \quad t_1 = 15 {}^\circ\text{C}, \quad t_2 = 22{,}5 {}^\circ\text{C}.$$
$$t = 22{,}5 + \frac{1 \times 450}{0{,}114 \times 22{,}3} \times (22{,}5 - 15),$$
$$t = 22{,}5 + \frac{3\,375}{2{,}542\,2},$$
$$\boldsymbol{t \approx 1\,350 {}^\circ\text{C}.}$$

2° Soit x la chaleur massique du liquide.

L'anneau de fer, porté à la température t_0, est plongé dans une masse M′ du liquide, dont la température est t_1. Après agitation, le liquide prend une température d'équilibre t_2'. Écrivons que la quantité de chaleur perdue par l'anneau est égale à la quantité de chaleur gagnée par le liquide :

(2) $$cm(t_0 - t_2') = x\,M'(t_2' - t_1).$$

Nous en tirons

$$x = \frac{cm}{M'} \times \frac{t_0 - t_2'}{t_2' - t_1}.$$

Application numérique :

$$cm = 2{,}542\,2 \text{ cal/}{}^\circ\text{C}, \qquad M' = 100 \text{ g}, \qquad t_0 = 100 {}^\circ\text{C},$$
$$t_1 = 15 {}^\circ\text{C}, \qquad t_2' = 19{,}1 {}^\circ\text{C}.$$
$$x = \frac{2{,}542\,2}{100} \times \frac{100 - 19{,}1}{19{,}1 - 15} = \frac{2{,}542\,2 \times 80{,}9}{100 \times 4{,}1}.$$
$$\boldsymbol{x \approx 0{,}50 \text{ cal.g}^{-1}.{}^\circ\text{C}^{-1}.}$$

3° Si c' est la chaleur massique du cuivre et m' la masse du calorimètre, la capacité calorifique de celui-ci est $c' \times m'$.

a) Calcul de la température corrigée t′ du four.

En tenant compte de la capacité calorifique du cuivre l'équation (1) devient

$$cm(t' - t_2) = (c_0 M + c'm')(t_2 - t_1)$$

$$cm(t' - t_2) = c_0 M(t_2 - t_1)$$

Cette relation fournit t' :

$$t' = t_2 + \frac{c_0 M + c'm'}{cm}(t_2 - t_1)$$

et, d'après le 1°,

$$t' = t + \frac{c'm'}{cm}(t_2 - t_1).$$

Si nous négligeons le terme $c'm'$, nous commettons sur la température du four une erreur absolue qui est la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte :

$$\Delta t = t - t' = -\frac{c'm'}{cm}(t_2 - t_1).$$

Application numérique :

$$c' = 0{,}1 \text{ cal. g}^{-1}. {}^\circ\text{C}^{-1}, \qquad m' = 200 \text{ g}, \qquad c'm' = 20 \text{ cal. } {}^\circ\text{C}^{-1},$$
$$cm = 2{,}542\,2 \text{ cal. } {}^\circ\text{C}^{-1}, \qquad t_2 - t_1 = 7{,}5 \ {}^\circ\text{C}.$$

$$\Delta t = -\frac{20}{2{,}542\,2} \times 7{,}5,$$

$$\Delta t \approx -59 \ {}^\circ\text{C}.$$

La température corrigée du four est

$$t' = t - \Delta t = 1\,350 + 59 = 1\,409 \ {}^\circ\text{C},$$

$$t' = \mathbf{1\,410} \ {}^\circ\text{C}.$$

En négligeant le terme $c'm'$, nous avons donc pris pour t une valeur approchée par défaut et commis une erreur relative

$$\left|\frac{\Delta t}{t'}\right| = \frac{59}{1\,410},$$

$$\left|\frac{\Delta t}{t'}\right| \approx \frac{4}{100}.$$

b) Calcul de la chaleur massique corrigée x' du liquide.

En tenant compte du terme $c'm'$, l'équation (2) devient

$$cm(t_0 - t_2') = (x'M' + c'm')(t_2' - t_1),$$

d'où l'on tire

$$x'M' + c'm' = cm \times \frac{t_0 - t_2'}{t_2' - t_1},$$

$$x' = \frac{cm}{M'} \times \frac{t_0 - t_2'}{t_2' - t_1} - \frac{c'm'}{M'}.$$

Si nous négligeons le terme $c'm'$, nous commettons sur la chaleur massique du liquide une erreur absolue

$$\Delta x = x - x' = \frac{c'm'}{M'}.$$

Application numérique :

$$c'm' = 20 \text{ cal.}^{\circ}C^{-1}, \qquad M' = 100 \text{ g},$$

$$\Delta x = \frac{20}{100} = 0{,}20 \text{ cal.g}^{-1}.^{\circ}C^{-1}.$$

La chaleur massique corrigée est

$$x' = x - \Delta x = 0{,}50 - 0{,}20.$$

$$\mathbf{x' = 0{,}30 \text{ cal.g}^{-1}.^{\circ}C^{-1}.}$$

En négligeant le terme $c'm'$, nous avons pris pour x une valeur approchée par excès et commis une erreur relative

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}2}{0{,}5}, \qquad \frac{\Delta x}{x} = \frac{4}{10}.$$

Cette erreur est considérable.

CHAPITRE XX

Changements d'états.

82. — Mesure de la chaleur de fusion de la glace.

1° Pour déterminer la chaleur de fusion de la glace, on place dans un vase Dewar 300 g d'eau à 30,5 °C, puis 55 g de glace à 0 °C; la température finale est 14,2 °C.

Quelle est la valeur de la chaleur latente de fusion de la glace (on néglige la capacité calorifique du calorimètre)?

Quelle est l'erreur due aux imprécisions des mesures (on admettra une erreur possible de 1 g sur les masses et de $\frac{1}{20}$ °C sur les températures)? Permet-elle d'expliquer l'écart avec la valeur généralement admise?

2° Pour déterminer la capacité calorifique du calorimètre et de ses accessoires, on verse 50 g d'eau à 35,2 °C dans le vase contenant 50 g d'eau à 15,1 °C; la température finale est 24,1 °C. Quelle est la valeur en eau du calorimètre? Est-elle déterminée avec précision en admettant les mêmes erreurs absolues sur les mesures? Quelle serait la chaleur de fusion de la glace en tenant compte de la valeur en eau du calorimètre?

(Bacc., Dijon.)

1° Le vase Dewar contient une masse m g d'eau à la température $t_1 = 30{,}5$ °C. On y plonge une masse m' g de glace à 0 °C. La glace fond. Nous savons que la chaleur de fusion x de la glace est la quantité de chaleur nécessaire pour transformer 1 g de glace à 0°C en 1 g d'eau liquide à la même température. La quantité de chaleur nécessaire pour fondre la masse m' de glace est

$$Q_1 = x \times m' \text{ calories.}$$

L'eau de fusion est ensuite portée de la température 0 °C à la température finale $t_2 = 14{,}2$ °C. Elle absorbe pendant cette transformation une quantité de chaleur

$$Q_2 = c_0 m' \times (t_2 - 0) = c_0 m' \times t_2 \text{ calories,}$$

c_0 étant la chaleur massique de l'eau.

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, la somme $Q_1 + Q_2$ est égale à la quantité de chaleur Q_3 cédée par l'eau du calorimètre quand elle passe de la température t_1 à la température t_2 :

$$Q_3 = c_0 m \times (t_1 - t_2) \text{ calories,}$$

d'où

$$xm' + c_0 m' t_2 = c_0 m(t_1 - t_2).$$

Cette équation nous donne x :

(1)

$$x = \frac{c_0 m}{m'}(t_1 - t_2) - c_0 t_2.$$

Application numérique :

$$c_0 = 1 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

$$m = 300 \text{ g}, \quad m' = 55 \text{ g}, \quad t_1 = 30{,}5\ {}^{\circ}\text{C}, \quad t_2 = 14{,}2\ {}^{\circ}\text{C}.$$

$$x = 1 \times \frac{300}{55}(30{,}5 - 14{,}2) - 1 \times 14{,}2,$$

$$x = 88{,}9 - 14{,}2,$$

$$\boldsymbol{x = 74{,}7 \text{ cal/g.}}$$

L'erreur absolue maximale commise sur chacune des masses est 1g; celle commise sur chacune des températures est 0,05 °C. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{299}{56}(30{,}45 - 14{,}25) - 14{,}25 < x < \frac{301}{54}(30{,}55 - 14{,}15) - 14{,}15,$$

$$72{,}24 < x < 77{,}27.$$

La valeur généralement admise pour la chaleur de fusion de la glace (80 cal/g) n'est pas comprise dans ces limites.

L'incertitude absolue de la mesure est

$$\Delta x = \frac{77{,}27 - 72{,}24}{2} \approx 2{,}5 \text{ cal/g;}$$

l'incertitude relative est

$$\frac{\Delta x}{x} \times \frac{2{,}5}{74{,}7} \approx \frac{1}{30}.$$

Le résultat de la mesure peut s'écrire

$$x = 74{,}7 \text{ cal/g} \pm 2{,}5 \text{ cal/g,}$$

ou mieux

$$x = 75 \text{ cal/g} \pm 3 \text{ cal/g.}$$

2° Pour déterminer la capacité calorifique, égale à μ cal/°C, du calorimètre on verse m_1 g d'eau à la température $t_1' = 35{,}2$ °C dans le vase contenant m_2 g d'eau à la température $t_2' = 15{,}1$ °C. La température finale est $t_3 = 24{,}1$ °C.

La quantité de chaleur perdue par la masse m_1 d'eau est

$$Q_1 = c_0 m_1 (t_1' - t_3) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur gagnée par le calorimètre et l'eau qu'il contient est

$$Q_2 = (c_0 m_2 + \mu)(t_3 - t_2') \text{ calories.}$$

Écrivons que ces quantités de chaleurs sont égales :

$$c_0 m_1 (t_1' - t_3) = (c_0 m_2 + \mu)(t_3 - t_2');$$

cette équation nous donne μ :

$$\mu = c_0 m_1 \times \frac{t_1' - t_3}{t_3 - t_2'} - c_0 m_2.$$

Application numérique :

$$c_0 = 1 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

$m_1 = 50$ g, $m_2 = 50$ g, $t_1' = 35{,}2$ °C, $t_2' = 15{,}1$ °C, $t_3 = 24{,}1$ °C.

$$\mu = 1 \times 50 \times \frac{35{,}2 - 24{,}1}{24{,}1 - 15{,}1} - 1 \times 50 = 50 \times \frac{11{,}1}{9} - 50,$$

$$\mu = \mathbf{11{,}66 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}}.$$

La valeur en eau du calorimètre est 12 g.

Pour calculer l'erreur maximale commise dans la mesure de μ, nous écrirons, comme précédemment,

$$49 \times \frac{35{,}15 - 24{,}15}{24{,}15 - 15{,}15} - 51 < \mu < 51 \times \frac{35{,}25 - 24{,}05}{24{,}05 - 15{,}05} - 49,$$

$$49 \times \frac{11}{9} - 51 < \mu < 51 \times \frac{11{,}2}{9} - 49,$$

$$8{,}9 < \mu < 14{,}5.$$

L'incertitude absolue de la mesure est

$$\Delta\mu = \frac{14{,}5 - 8{,}9}{2} = 2{,}8 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}.$$

L'incertitude relative est

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{2{,}8}{11{,}66} \approx \frac{1}{4}.$$

Nous écrirons le résultat de la mesure sous la forme

$$\mu = 11{,}7 \text{ cal/}^{\circ}\text{C} \pm 2{,}8 \text{ cal/}^{\circ}\text{C},$$

ou mieux

$$\mu = 12 \text{ cal/}^{\circ}\text{C} \pm 3 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}.$$

Si nous tenons compte de la masse en eau du calorimètre, l'équation calorimétrique donnant la valeur corrigée x' de la chaleur de fusion est

$$x'm' + c_0 m' t_2 = (c_0 m + \mu)(t_1 - t_2).$$

Cette équation nous donne x' :

$$x' = \frac{c_0 m + \mu}{m'}(t_1 - t_2) - c_0 t_2.$$

Application numérique :

$c_0 = 1$ cal.g^{-1}.°C^{-1}; $m = 300$ g; $\mu = 12$ cal.°C^{-1}; $m' = 55$ g;
$t_1 = 30{,}5$ °C; $t_2 = 14{,}2$ °C.

$$x' = \frac{1 \times 300 + 12}{55}(30{,}5 - 14{,}2) - 1 \times 14{,}2,$$

$$x' = \frac{300 + 12}{55} \times 16{,}3 - 14{,}2.$$

$$x' = \mathbf{78{,}3\ cal/g.}$$

Pour déterminer l'incertitude de la mesure, nous écrirons, comme précédemment, en tenant compte de l'incertitude de la mesure de μ,

$$\frac{299 + 9}{56} \times 16{,}2 - 14{,}25 < x' < \frac{301 + 15}{54} \times 16{,}4 - 14{,}15,$$

$$74{,}8 < x' < 81{,}8.$$

La valeur généralement admise pour la chaleur de fusion de la glace est bien comprise dans ces limites.

L'incertitude absolue de la mesure est

$$\Delta x' = \frac{81{,}8 - 74{,}8}{2} = 3{,}5 \text{ cal/g};$$

l'incertitude relative est

$$\frac{\Delta x'}{x'} = \frac{3{,}5}{78{,}3},$$

$$\frac{\Delta x'}{x'} \approx \frac{1}{20}.$$

Le résultat de la mesure peut s'écrire

$$x' = 78{,}3 \text{ cal/g} \pm 3{,}5 \text{ cal/g},$$

ou mieux $\quad x' = 78 \text{ cal/g} \pm 4 \text{ cal/g}.$

83. — Congélation partielle de l'eau d'un calorimètre par immersion d'un corps à basse température.

Dans un calorimètre de cuivre dont la masse est 100 g et qui contient 200 g d'eau à 4 °C, on introduit 300 g de cuivre à — 20 °C. On agite jusqu'à ce que la température soit uniforme.

1° Quelle est la température finale?

2° Montrer que, si le cuivre introduit dans le calorimètre est à la température — 50 °C, une partie de l'eau se congèle.

3° Calculer la masse d'eau congelée.

Chaleur massique du cuivre : 0,095.

Chaleur de fusion de la glace : 80 cal/g.

(Bacc. tech., Rennes.)

1° Dans le calorimètre de cuivre (chaleur massique c) dont la masse est m g et contenant une masse m' g d'eau à la température $t_1 = 4$ °C, on introduit une masse M g de cuivre à la température $t_2 = -20$ °C. Après agitation, le calorimètre et son contenu sont à la température θ inconnue.

La quantité de chaleur Q_1 perdue par le calorimètre et la masse m' d'eau qu'il contient est, en désignant par c' la chaleur massique de l'eau,

$$Q_1 = (cm + c'm')(t_1 - \theta) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur Q_2 gagnée par la masse M de cuivre est

$$Q_2 = cM(\theta - t_2) \text{ calories.}$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, ces quantités de chaleur sont égales :

$$(cm + c'm')(t_1 - \theta) = cM(\theta - t_2).$$

Nous tirons de cette équation la température finale θ :

$$(1) \qquad \theta = \frac{(cm + c'm')\,t_1 + cMt_2}{cM + cm + c'm'}.$$

Application numérique :

$$m = 100 \text{ g}, \quad c = 0{,}095 \text{ cal.g}^{-1}.\text{°C}^{-1}, \quad m' = 200 \text{ g},$$
$$c' = 1 \text{ cal.g}^{-1}.\text{°C}^{-1}, \quad M = 300 \text{ g}, \quad t_1 = 4° \text{ C}, \quad t_2 = -20 \text{ °C}.$$
$$cm + c'm' = 0{,}095 \times 100 + 1 \times 200 = 209{,}5 \text{ cal.°C}^{-1},$$
$$cM + cm + c'm' = 0{,}095 \times 300 + 209{,}5 = 238 \text{ cal.°C}^{-1}.$$
$$\theta = \frac{209{,}5 \times 4 + 28{,}5(-20)}{238} = \frac{838 - 570}{238} = 1{,}126,$$
$$\theta = \mathbf{1{,}13 \text{ °C}}.$$

2° Supposons que la température initiale de la masse M de cuivre soit égale à -50 °C au lieu de -20 °C.

Si nous appliquions la formule (1), en posant $t_2 = -50$ °C, nous obtiendrions pour θ une valeur négative, ce qui signifierait que l'eau serait liquide au-dessous de 0 °C.

L'eau du calorimètre s'est donc partiellement (ou totalement) transformée en glace.

3° Désignons par x la masse d'eau qui se transforme en glace. Cette transformation, inverse de la fusion, est exothermique. La quantité de chaleur cédée par le calorimètre, quand sa température passe de la valeur $t_1 = 4$ °C à 0 °C, est

$$Q_1 = (cm + c'm')(t_1 - 0) = (cm + c'm')\,t_1 \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur cédée par la masse x d'eau pendant sa transformation en glace est

$$Q_1' = L \times x \text{ calories,}$$

L désignant la chaleur de fusion de la glace.

Enfin la quantité de chaleur absorbée par la masse M de cuivre quand sa température passe de la valeur $t_2' = -50$ °C à 0 °C est

$$Q_2 = cM(0 - t_2') = -cMt_2' \text{ calories.}$$

Appliquons le principe de la conservation de la chaleur :

$$Q_1 + Q_1' = Q_2,$$

$$(cm + c'm')\, t_1 + L \times x = -cMt_2',$$

d'où nous tirons $x = \dfrac{-cMt' - (cm + c'm')t_1}{L}$.

Application numérique :

$$cm + c'm' = 209{,}5 \text{ cal.}^{\circ}C^{-1}, \qquad t_1 = 4\ ^{\circ}C,$$

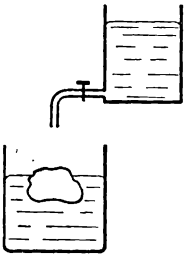
$$cM = 0{,}095 \times 300 = 28{,}5 \text{ cal.}^{\circ}C^{-1}, \quad t_2' = -50\ ^{\circ}C, \quad L = 80 \text{ cal.g}^{-1}.$$

$$x = \frac{-28{,}5 \times (-50) - 209{,}5 \times 4}{80} = \frac{1\,425 - 838}{80}.$$

$$x' = 7{,}33 \text{ g.}$$

84. — Mesure de la chaleur de fusion de la glace et de la capacité calorifique moléculaire d'un gaz.

1° Un calorimètre en laiton pesant 500 g contient 500 g de glace à — 20 °C. On fait couler dans ce calorimètre un filet d'eau à 80 °C, avec un débit constant de 50 g à la minute. Il faut 11 minutes 30 secondes pour que la glace soit entièrement transformée en eau liquide à 0 °C.



Sachant que la chaleur massique du laiton est 0,1 cal. $g^{-1}.{}^{\circ}C^{-1}$ et celle de la glace 0,5 cal.$g^{-1}.{}^{\circ}C^{-1}$, calculer la chaleur de fusion de la glace.

2° L'expérience étant poursuivie, au bout de combien de temps la température du calorimètre atteindra-t-elle 20 °C? Quelle sera alors la masse totale d'eau contenue dans le calorimètre?

3° A ce moment, on introduit dans le calorimètre un bloc d'aluminium pesant 500 g et sortant d'une étuve à 100 °C. L'arrivée de l'eau chaude ayant été interrompue, la température finale est 25,2 °C. Quelle est la chaleur massique de l'aluminium?

4° On introduit ce même bloc d'aluminium à 100 °C dans un récipient calorifugé de 20 litres, aussitôt refermé, contenant un gaz parfait dans les conditions normales de pression et de température. La température d'équilibre est alors 95,9 °C. Quelle est la capacité calorifique moléculaire du gaz à volume constant? Quelle est la nouvelle pression du gaz?

Le volume d'une molécule-gramme de gaz est, dans les conditions normales de pression et de température, égal à 22,4 litres.

(Bacc., Lyon.)

1° Soit x la chaleur de fusion de la glace.

La glace et le calorimètre passent d'abord de la température $t_1 = -20$ °C à la température $t_2 = 0$ °C.

Si nous désignons par m la masse de la glace, par c sa chaleur massique, par m' la masse du calorimètre et par c' la chaleur massique du laiton, la quantité de chaleur absorbée par l'ensemble pendant cette transformation est

$$Q_1 = (cm + c'm')\ (t_2 - t_1) \text{ calories.}$$

La glace se transforme ensuite en eau liquide à la même température t_2. La quantité de chaleur qu'elle reçoit pendant cette transformation est

$$Q_2 = x \times m \text{ calories.}$$

Par ailleurs, le filet d'eau est passé de la température $t = 80$ °C à la température $t_2 = 0$ °C au bout d'un temps θ minutes. Si d désigne le débit du filet d'eau en g/mn, la quantité de chaleur qu'il cède pendant cette transformation est, en désignant par c_0 la chaleur massique de l'eau,

$$Q_3 = c_0 \times d \times \theta\ (t - t_2) \text{ calories.}$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, nous pouvons écrire

$$Q_1 + Q_2 = Q_3,$$

ou
$$(cm + c'm')(t_2 - t_1) + xm = c_0 d\,\theta(t - t_2).$$

D'où nous tirons

$$x = \frac{c_0 d\,\theta}{m}\ (t - t_2) - \frac{cm + c'm'}{m}\ (t_2 - t_1).$$

Application numérique :

$m = 500$ g, $m' = 500$ g, $c_0 = 1$ cal.g^{-1}.°C^{-1}, $d = 50$ g/mn,
$\theta = 11$ mn 30 s, ou 11,5 mn, $c = 0{,}5$ cal.g^{-1}.°C^{-1},
$c' = 0{,}1$ cal.g^{-1}.°C^{-1}, $t = 80$ °C, $t_1 = -20$ °C, $t_2 = 0$ °C.

$$x = \frac{1 \times 50 \times 11{,}5}{500}\ (80 - 0) - \frac{0{,}5 \times 500 + 0{,}1 \times 500}{500}\ [0 - (-20)].$$

$$x = 1{,}15 \times 80 - (0{,}5 + 0{,}1) \times 20,$$

$$x = 92 - 12,$$

$$\boldsymbol{x = 80 \text{ cal/g.}}$$

2° Soit θ' le temps au bout duquel la température du calorimètre atteint la valeur donnée $t_3 = 20$ °C.

Le calorimètre contient alors, initialement, une masse d'eau égale à $m + d \times \theta$ à la température $t_2 = 0$ °C.

Pour élever la température du calorimètre de $t_2 = 0$ °C à $t_3 = 20$ °C, il faut lui fournir une quantité de chaleur Q_1' telle que

$$Q_1' = [c_0\,(m + d \times \theta) + c'm']\ (t_3 - t_2) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur cédée par le filet d'eau pendant cette transformation est

$$Q'_2 = c_0 d\,\theta'(t - t_3).$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, $Q'_1 = Q'_2$,

$$[c_0(m + d \times \theta) + c'm'](t_3 - t_2) = c_0 d\,\theta'\ (t - t_3),$$

d'où nous tirons

$$\theta' = \frac{c_0(m + d \times \theta) + c'm'}{c_0 d} \times \frac{t_3 - t_2}{t - t_3}.$$

Application numérique :

$$c_0 = 1 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1},$$

$$m = 500 \text{ g},\ d \times \theta = 50 \times 11{,}5 \text{ g},\ c'm' = 50 \text{ cal/}{}^{\circ}\text{C},\ t_3 = 20\ {}^{\circ}\text{C},$$

$$t_2 = 0\ {}^{\circ}\text{C}, \qquad t = 80\ {}^{\circ}\text{C}.$$

$$\theta' = \frac{1(500 + 50 \times 11{,}5) + 50}{50} \times \frac{20 - 0}{80 - 20},$$

$$\theta' = 22{,}5 \times \frac{1}{3} = 7{,}5 \text{ mn},$$

$$\boldsymbol{\theta' = 7 \text{ mn } 30 \text{ s.}}$$

3° Soit c_1 la chaleur massique de l'aluminium.

La masse m_1 d'aluminium, portée à la température $t'_1 = 100\ {}^{\circ}\text{C}$, est plongée dans le calorimètre. Après agitation, la température finale de l'eau est $t'_2 = 25{,}2\ {}^{\circ}\text{C}$.

La quantité de chaleur perdue par la masse d'aluminium est

$$Q''_1 = c_1 \times m_1(t'_1 - t'_2) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur gagnée par le calorimètre contenant une masse d'eau égale à $m + d(\theta + \theta')$ à la température t_3 est

$$Q''_2 = [c_0 m + c_0 d(\theta + \theta') + c'm'](t'_2 - t_3) \text{ calories.}$$

Ces deux quantités de chaleur sont égales :

$$c_1 \times m_1(t'_1 - t'_2) = [c_0 m + c_0 d(\theta + \theta') + c'm'](t'_2 - t_3);$$

d'où nous tirons

$$c_1 = \frac{c_0 m + c_0 d(\theta + \theta') + c'm'}{m_1} \times \frac{t'_2 - t_3}{t'_1 - t'_2}.$$

Application numérique :

$c_0 = 1$ cal.g^{-1}.°C^{-1}, $d = 50$ g/mn, $\theta + \theta' = 11{,}5 + 7{,}5$ mn,
$c'm' = 50$ cal/°C, $m_1 = 500$ g, $t'_1 = 100$ °C, $t'_2 = 25{,}2$ °C, $t_3 = 20$ °C.

$$c_1 = \frac{1 \times 500 + 1 \times 50(11{,}5 + 7{,}5) + 50}{500} \times \frac{25{,}2 - 20}{100 - 25{,}2},$$

$$c_1 = 3 \times \frac{5{,}2}{74{,}8}, \qquad \boldsymbol{c_1 = 0{,}208 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1}.}$$

4° Désignons par m_2 la masse du gaz contenu dans le volume v du récipient et par c_2 sa chaleur massique à volume constant.

La température de ce gaz croît de $t_2 = 0$ °C à $t_3' = 95{,}9$ °C.

En même temps, la masse m_1 d'aluminium (chaleur massique m_1) passe de la température $t_1' = 100$ °C à la température $t_3' = 95{,}9$ °C.

Écrivons que la quantité de chaleur perdue par le bloc d'aluminium est égale à la quantité de chaleur absorbée par le gaz :

$$c_1 m_1 (t_1' - t_3') = c_2 m_2 (t_3' - t_2).$$

Le gaz est supposé parfait : une masse M g égale à sa masse moléculaire occupe le volume de 22,4 l dans les conditions normales de température et de pression. Il en résulte que

$$m_2 = \mathrm{M} \times \frac{v}{22{,}4}.$$

Portons cette valeur de m_2 dans l'équation précédente :

$$c_1 m_1 (t_1' - t_3') = c_2 \mathrm{M} \times \frac{v}{22{,}4} \times (t_3' - t_2).$$

Le produit $c_2\mathrm{M}$ est la capacité calorifique moléculaire cherchée :

$$c_2\mathrm{M} = c_1 m_1 \times \frac{22{,}4}{v} \times \frac{t_1' - t_3'}{t_3' - t_2}.$$

Application numérique :

$$c_1 = 0{,}208 \text{ cal.g}^{-1}.\text{°C}^{-1}, \qquad m_1 = 500 \text{ g}, \qquad v = 20 \text{ l},$$

$$t_1' = 100 \text{ °C}, \qquad t_2 = 0 \text{ °C}, \qquad t_3' = 95{,}9 \text{ °C}.$$

$$c_2\mathrm{M} = 0{,}208 \times 500 \times \frac{22{,}4}{20} \times \frac{100 - 95{,}9}{95{,}9 - 0},$$

$$c_2\mathrm{M} = \frac{104 \times 22{,}4 \times 4{,}1}{20 \times 95{,}9} = 4{,}97,$$

$$\boldsymbol{c_2\mathrm{M} = 4{,}97 \text{ cal/°C}.}$$

La pression du gaz est donnée par la loi de Charles :

$$p = p_0(1 + \beta t).$$

Numériquement :

$$\beta = \frac{1}{273}, \qquad p_0 = 76 \text{ cm de mercure}, \qquad t = 95{,}9 \text{ °C}.$$

$$p = 76\left(1 + \frac{95{,}9}{273}\right),$$

$$\boldsymbol{p = 102{,}7 \text{ cm de mercure}.}$$

85. — Mesure de la chaleur de vaporisation de l'eau.

Dans un calorimètre en laiton dont la masse est 200 g et contenant 482 g d'eau à 16 °C, on fait arriver un courant de vapeur d'eau à 100 °C. Au bout de quelques minutes, on coupe l'arrivée de la vapeur. Le thermomètre indique une température finale de 30,6 °C. La masse totale du calorimètre et de l'eau est égale à 694 g à la fin de l'expérience. Calculer la chaleur de vaporisation de l'eau à 100 °C.

Chaleur massique du laiton : 0,09.

Soit x la chaleur de vaporisation de l'eau à 100 °C. Le calorimètre en laiton, de chaleur massique c et de masse m g, contient une masse m'g d'eau à la température $t_1 = 16$ °C. Le courant de vapeur d'eau à 100 °C qui arrive dans le liquide commence par se condenser. Puis l'eau de condensation passe de la température d'ébullition 100 °C à la température finale $t_2 = 30{,}6$ °C. A la fin de l'expérience, la masse totale du calorimètre et de l'eau est égale à Mg. La masse de l'eau de condensation est donc $m'' = M - (m + m')$ g.

La quantité de chaleur cédée par l'eau pendant sa transformation de vapeur à 100 °C en eau à 100 °C est

$$Q_1 = x \times m'' \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur cédée par l'eau de condensation pendant son refroidissement de la température 100 °C à la température t_2 est, en désignant par c' la chaleur massique de l'eau,

$$Q_2 = c'm''(100 - t_2) \text{ calories.}$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur, la somme $Q_1 + Q_2$ est égale à la quantité de chaleur Q_3 reçue par le calorimètre :

$$Q_3 = (cm + c'm')(t_2 - t_1) \text{ calories.}$$

L'équation calorimétrique est donc

$$xm'' + c'm''(100 - t_2) = (cm + c'm')(t_2 - t_1),$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{cm + c'm'}{m''}(t_2 - t_1) - c'(100 - t_2).$$

Application numérique :

$$m = 200 \text{ g}, \; c = 0{,}09 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1}, \; m' = 482 \text{ g},$$

$$c' = 1 \text{ cal.g}^{-1}.{}^{\circ}\text{C}^{-1}, \; M = 694 \text{ g},$$

$$m'' = M - (m + m') = 694 - 682 = 12 \text{ g}, \; t_1 = 16 \text{ °C}, \; t_2 = 30{,}6 \text{ °C},$$

$$x = \frac{0{,}09 \times 200 + 1 \times 482}{12}(30{,}6 - 16) - 1\,(100 - 30{,}6).$$

$$\boldsymbol{x = 539 \text{ calories.}}$$

86. — Calcul de la masse d'un volume d'hydrogène recueilli sur la cuve à eau.

Dans la préparation de l'hydrogène, on recueille sur la cuve à eau 20 cm^3 de ce gaz à la température de 20 °C. L'eau s'élève à une hauteur $h = 15$ cm dans l'éprouvette. Sachant que la pression atmosphérique est $H = 756$ mm de mercure, calculer la masse de l'hydrogène recueilli.

La pression maximale de la vapeur d'eau à 20 °C est $f = 1{,}7$ cm de mercure.
Masse moléculaire de l'hydrogène : $M = 2$.
Masse volumique du mercure : 13,6 g/cm^3.
Masse volumique de l'air dans les conditions normales de température et de pression : 0,001 3 g/cm^3.

La masse de l'hydrogène recueilli est égale au produit du volume v qu'il occupe par sa masse volumique μ dans les conditions de l'expérience :

(1) $$m = \mu \times v.$$

La masse volumique μ à t °C et sous la pression p est donnée en fonction de sa masse volumique μ_0 à 0 °C et sous la pression normale p_0 par la formule (problème n° 76)

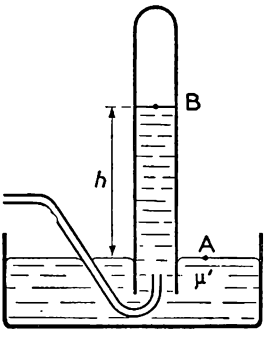
(2) $$\mu = \mu_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

Calcul de p. — L'hydrogène est saturé d'humidité. D'après la loi du mélange des gaz de Dalton, la pression de l'hydrogène humide, p_t, occupant le volume v, est la somme de la pression de l'hydrogène sec, p, et de la pression maximale de la vapeur d'eau, f, à la température t :

$$p_t = p + f,$$

d'où

(3) $$p = p_t - f.$$



La pression p_t est donnée par le principe général de l'hydrostatique. D'après ce principe, la différence de pression entre les points A et B du liquide est égale au produit du poids volumique du liquide par la distance verticale séparant les deux points.

μ' étant la masse volumique du liquide, g l'intensité de la pesanteur, le poids volumique est $\mu' \times g$ et la différence de pression entre A et B est donnée par l'expression

$$p_A - p_B = \mu' \times g \times h.$$

Exprimons cette différence de pression en hauteur de mercure. Il suffit, pour cela, de diviser $\mu' \times g \times h$ par le poids volumique du mercure, $\mu'' \times g$.

Nous avons, dans ces conditions,

$$p_A - p_B = \frac{\mu'}{\mu''} \times h. \tag{4}$$

La pression p_A est égale à la pression atmosphérique H exprimée en hauteur de mercure.

La pression p_t est la pression cherchée p_t.

L'équation (4) s'écrit alors :

$$H - p_t = \frac{\mu'}{\mu''} \times h.$$

Nous en tirons

$$p_t = H - \frac{\mu'}{\mu''} \times h$$

et

$$p = p_t - f = H - \frac{\mu'}{\mu''} \times h - f.$$

Calcul de μ_0. — La densité, d, de l'hydrogène par rapport à l'air est donnée par la formule d'Avogadro-Ampère :

$$M = 29\ d.$$

La masse volumique de l'hydrogène, μ_0, dans les conditions normales, est égale au produit de la masse volumique de l'air, a_0, dans ces mêmes conditions, par la densité d de l'hydrogène par rapport à l'air :

$$\mu_0 = a_0 \times d = a_0 \times \frac{M}{29}.$$

En portant ces valeurs de p et μ_0 dans l'expression (2) il vient

$$\mu = a_0 \times \frac{M}{29} \times \frac{H - \frac{\mu'}{\mu''} \times h - f}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

La masse m de l'hydrogène est donc

$$m = \mu \times v = a_0 \times \frac{M}{29} \times \frac{H - \frac{\mu'}{\mu''} \times h - f}{p_0} \times \frac{1}{1 + \alpha t} \times v.$$

Si nous voulons obtenir m en grammes il faudra prendre a_0 en g/cm³, v en cm³, H, h, f, p_0 en centimètres de mercure, μ' et μ'' en g/cm³.

Application numérique :

$a_0 = 0{,}001\ 3$ g/cm³; M = 2; H = 756 mm de mercure, ou 75,6 cm de mercure; $h = 15$ cm; $f = 1{,}7$ cm de mercure; $p_0 = 76$ cm de mercure; $\mu' = 1$ g/cm³; $\mu'' = 13{,}6$ g/cm³; $\alpha = \frac{1}{273}$; $t = 20$ °C; $v = 20$ cm³.

$$m = 0{,}001\ 3 \times \frac{2}{29} \times \frac{75{,}6 - \frac{1}{13{,}6} \times 15 - 1{,}7}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}} \times 20,$$

$$m = 0{,}001\ 3 \times \frac{2}{29} \times \frac{73{,}9 \times 13{,}6 - 15}{13{,}6 \times 76} \times \frac{273}{293} \times 20,$$

$$m = \frac{0{,}052 \times 990 \times 273}{29 \times 1\,033{,}6 \times 293} = 0{,}001\ 6 \text{ g.}$$

$$\boldsymbol{m = 1{,}60 \text{ mg.}}$$

87. — Étude de la vaporisation de l'éther.

1° On introduit une trace d'éther dans la chambre d'un tube barométrique retourné sur une cuve profonde contenant du mercure; le mercure monte dans le tube jusqu'à une hauteur de 65 cm. Sachant que la pression atmosphérique est 76 cm de mercure, quelle est la pression de la vapeur d'éther dans la chambre barométrique?

2° On enfonce le tube dans la cuve, la vapeur restant non saturante; la hauteur du mercure dans le tube devient 50 cm. Quelle est la diminution relative du volume de la chambre barométrique?

3° On continue à enfoncer le tube jusqu'à ce qu'il apparaisse une goutte de liquide à la surface du mercure. Sachant que la pression maximale de la vapeur d'éther à la température de l'expérience est 37 cm de mercure, quelle est alors la hauteur du mercure dans le tube? Qu'observe-t-on si l'on continue à enfoncer le tube dans la cuve?

4° On porte le tube à la température d'ébullition de l'éther sous la pression atmosphérique (34,6 °C) et l'on s'arrange pour que la vapeur d'éther dans le tube demeure constamment saturante. Qu'observe-t-on?

5° On fait arriver, durant un certain temps, de la vapeur saturante d'éther sous la pression de 76 cm de mercure (sa température est donc 34,6 °C) dans un serpentin plongé dans un calorimètre. La valeur en eau du calorimètre est 554 g et sa température initiale 15 °C. On admettra que toute la vapeur d'éther se condense dans le serpentin. La température finale du calorimètre est 18,6 °C : la masse d'éther condensée dans le serpentin est 20 g. Calculer la chaleur latente de vaporisation de l'éther sous la pression de 76 cm de mercure. On donne : chaleur massique de l'éther liquide : 0,51 cal.g^{-1}.°C^{-1}.

(Bacc., Nancy.)

1° Soient x la pression de la vapeur d'éther et H la pression atmosphérique, ces pressions étant exprimées l'une et l'autre en centimètres de mercure (*fig.* 1).

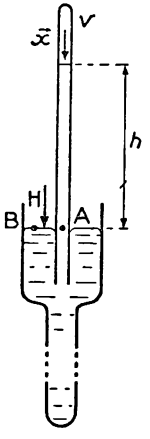


FIG. 1.

En vertu du principe général de l'hydrostatique, les pressions p_A et p_B aux deux points A et B du liquide en équilibre situés en un même plan horizontal sont égales :

$$p_A = p_B.$$

Or $p_A = x + h$ cm de mercure.

La pression p_B est la pression atmosphérique

$$p_B = \text{H cm de mercure,}$$

d'où $$x + h = \text{H}$$

et $$x = \text{H} - h.$$

Application numérique :

H = 76 cm de mercure, $h = 65$ cm de mercure.

$$x = 76 - 65,$$

$$\boldsymbol{x = 11 \text{ cm de mercure.}}$$

2° Soit v le volume de la chambre barométrique lorsque la hauteur du mercure dans le tube est h.

On enfonce le tube dans la cuve : le volume de la chambre barométrique devient v' et la hauteur du mercure $h' < h$.

La vapeur est supposée non saturante : elle suit, en première approximation, les lois des gaz parfaits.

La masse de la vapeur n'a pas varié et la température reste constante. On peut appliquer la loi de Mariotte aux deux états du gaz :

1er état : volume v, pression $\text{H} - h$;

2e état : volume v', pression $\text{H} - h'$.

$$v(\text{H} - h) = v'(\text{H} - h'),$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\text{H} - h}{\text{H} - h'}.$$

On en déduit la variation relative du volume de la chambre barométrique :

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{(\text{H} - h) - (\text{H} - h')}{\text{H} - h'} = \frac{h' - h}{\text{H} - h'}.$$

Application numérique :

$h = 65$ cm, $h' = 50$ cm, H = 76 cm.

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{50 - 65}{76 - 50},$$

$$\frac{v' - v}{v} = -\frac{15}{26}.$$

Cette variation relative est négative et correspond bien à une diminution de volume.

3° Lorsqu'il apparaît une goutte du liquide à la surface du mercure, la vapeur devient saturante. Sa pression est alors constante et égale à la pression maximale h_m de la vapeur d'éther à la température de l'expérience.

La hauteur h'' du mercure dans le tube est donnée par l'équation

$$h_m + h'' = H,$$

d'où

$$h'' = H - h_m.$$

Application numérique :

$$H = 76 \text{ cm}, \quad h_m = 37 \text{ cm}.$$

$$h'' = 76 - 37,$$

$$\boldsymbol{h'' = 39 \text{ cm de mercure.}}$$

4° Si l'on fait croître la température du tube, la vapeur restant constamment saturante, la pression maximale h_m croît et, par suite, la hauteur du mercure diminue.

Lorsqu'on atteint la température d'ébullition de l'éther sous la pression H, la pression maximale h_m devient précisément égale à H (2e loi de l'ébullition). Le mercure est donc au même niveau dans le tube et dans la cuve.

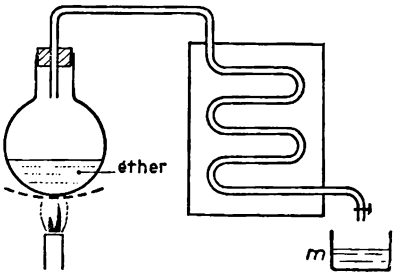


FIG. 2.

5° La figure 2 représente le schéma du dispositif expérimental. Les données du problème sont les suivantes :

Valeur en eau du calorimètre : M g,
température initiale de l'eau : t_1 °C,
température finale de l'eau : t_2 °C,
température d'ébullition de l'éther sous la pression H cm de mercure : t °C,
masse de l'éther condensée : m g,
chaleur massique de l'éther liquide : c cal.g^{-1}.°C^{-1},
chaleur massique de l'eau : c' cal.g^{-1}.°C^{-1}.

Soit x la chaleur latente de vaporisation de l'éther sous la pression H (température t).

La quantité de chaleur reçue par le calorimètre est

$$Q_1 = c'M \times (t_2 - t_1) \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur cédée par la masse m d'éther en se condensant à la température t est

$$Q_2 = x \times m \text{ calories.}$$

La quantité de chaleur cédée par la masse m d'éther liquide lorsqu'elle passe de t °C à t_2 °C est

$$Q_3 = c \times m \times (t - t_2) \text{ calories.}$$

En vertu du principe de la conservation de la chaleur,

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

$$c' \times M\ (t_2 - t_1) = x \times m + c \times m\ (t - t_2),$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{c' \times M\,(t_2 - t_1) - c \times m\,(t - t_2)}{m}.$$

Application numérique :

$c' = 1$ cal.g^{-1}.°C^{-1}, $M = 554$ g, $t_1 = 15$ °C, $t_2 = 18{,}6$ °C, $t = 34{,}6$ °C, $m = 20$ g, $c = 0{,}51$ cal.g^{-1}.°C^{-1}.

$$x = \frac{1 \times 554\,(18{,}6 - 15) - 0{,}51 \times 20\,(34{,}6 - 18{,}6)}{20},$$

$$x = \frac{1\,994{,}4 - 163{,}2}{20} = 91{,}56 \text{ cal/g.}$$

$$\boldsymbol{x = 91{,}6 \text{ cal/g.}}$$

CHAPITRE XXI

Chimie
Problèmes généraux. Dosages

88. — Préparation de l'oxygène.

On chauffe un mélange de 50 g de chlorate de potassium et de 50 g de dioxyde de manganèse.

On arrête la réaction lorsqu'on a obtenu 6,72 litres d'oxygène. Quelle est la composition du mélange résiduel ?

$$K = 39, \qquad Cl = 35{,}5, \qquad O = 16.$$

Volume moléculaire dans les conditions de l'expérience : $V = 22{,}4$ litres.

Le chlorate de potassium, en présence de dioxyde de manganèse, se décompose en donnant du chlorure de potassium et de l'oxygène :

$$2\,KClO_3 \rightarrow 2\,KCl + 3\,\overset{\nearrow}{O_2}.$$

Le dioxyde de manganèse n'intervient que comme catalyseur : à la fin de la réaction on en retrouve la masse initiale.

Soit m grammes la masse initiale de chlorate de potassium, x grammes la masse de chlorate de potassium qui a disparu, y grammes la masse de chlorure de potassium formé, v litres le volume d'oxygène dégagé.

Le mélange résiduel est formé de

$(m - x)$grammes $KClO_3 + y$ grammes $KCl + 50$ grammes MnO_2.

La détermination de x et y résulte d'un raisonnement très simple.

a) *Détermination de x.* — D'après l'équation de réaction, il faut prendre 2 molécules de chlorate de potassium pour obtenir 3 molécules d'oxygène.

Si nous raisonnons sur des moles nous dirons qu'il faut prendre 2 moles $KClO_3$ pour obtenir 3 moles O_2, ou bien, pour écrire une équation, que le nombre de moles $KClO_3$ est égal aux $\frac{2}{3}$ du nombre de moles O_2.

Une mole $KClO_3$ a une masse de $39 + 35,5 + 3 \times 16 = 122,5$ g.

x grammes $KClO_3$ correspondent à $\frac{x}{122,5}$ moles.

Une mole O_2 occupe, dans les conditions de l'expérience, un volume V litres.

v litres O_2 correspondent à $\frac{v}{V}$ moles.

L'équation du problème est donc

$$\frac{x}{122,5} = \frac{2}{3} \times \frac{v}{V}.$$

Nous pouvons en déduire x, masse de chlorate de potassium qui a disparu :

$$x = \frac{2}{3} \times \frac{v}{V} \times 122,5.$$

b) Détermination de y. — D'après l'équation de réaction, le nombre de moles KCl est égal aux $\frac{2}{3}$ du nombre de moles O_2.

Une mole KCl a pour masse $39 + 35,5 = 74,5$ g.

y grammes KCl correspondent à $\frac{y}{74,5}$ moles.

Le nombre de moles O_2 dans v litres est $\frac{v}{V}$.

D'où l'équation donnant y :

$$\frac{y}{74,5} = \frac{2}{3} \times \frac{v}{V},$$

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{v}{V} \times 74,5.$$

Application numérique :

$$m = 50 \text{ g}, \qquad v = 6,72 \text{ litres}, \qquad V = 22,4 \text{ litres}.$$

$$x = \frac{2}{3} \times \frac{6,72}{22,4} \times 122,5 = 24,5 \text{ g}.$$

$$m - x = 50 - 24,5 = 25,5 \text{ g}.$$

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{6,72}{22,4} \times 74,5 = 14,9 \text{ g}.$$

Composition du mélange résiduel :

25,5 grammes $KClO_3$ + 14,9 grammes KCl + 50 grammes MnO_2.

89. — Dosage d'une solution d'acide chlorhydrique.

On considère une solution S d'acide chlorhydrique du commerce, dont on prélève 100 cm³ qu'on complète à 1 litre avec de l'eau distillée. 10 cm³ de cette solution étendue sont traités par un excès de nitrate d'argent; il se forme un précipité qui, lavé et séché, pèse 1,636 g.

1° Calculer la masse d'acide chlorhydrique pur contenu dans 1 litre de la solution S.

2° Quel volume d'une solution de soude à 40 g par litre faut-il verser pour neutraliser exactement 15 cm³ de la solution S?

1° La solution d'acide chlorhydrique réagit sur la solution de nitrate d'argent en donnant un précipité de chlorure d'argent AgCl et de l'acide nitrique :

$$\underbrace{H^+, Cl^-}_{\sim} + \underbrace{Ag^+, NO_3^-}_{\sim} \rightarrow \underbrace{AgCl}_{\downarrow} + \underbrace{H^+, NO_3^-}_{\sim},$$

ou plus simplement

$$Cl^- + Ag^+ \rightarrow \underbrace{AgCl}_{\downarrow}.$$

D'après cette équation, le nombre d'ions-grammes Cl^- contenus dans le volume $v = 10$ cm³ de la solution étendue est égal au nombre de moles AgCl contenues dans la masse m g du précipité formé.

Une mole AgCl ayant pour masse $108 + 35{,}5 = 143{,}5$ g, ce nombre est $\frac{m}{143{,}5}$.

Désignons par t le nombre d'ions-grammes Cl^- contenus dans un litre de la solution S.

1 litre de la solution étendue en renferme $\frac{t \times 100}{1\,000} = \frac{t}{10}$.

Le nombre d'ions-grammes Cl^- contenus dans le volume v cm³ de la solution étendue est

$$\frac{t}{10} \times \frac{v}{1\,000}.$$

Nous pouvons donc écrire l'équation

$$\frac{t}{10} \times \frac{v}{1\,000} = \frac{m}{143{,}5},$$

d'où nous tirons

$$t = \frac{m}{143{,}5} \times \frac{10\,000}{v}.$$

Un ion-gramme Cl^- correspond à une mole HCl dont la masse est $35{,}5 + 1 = 36{,}5$ g.

La masse d'acide contenue dans un litre de solution S est donc

$$M = 36{,}5 \times t.$$

Application numérique :

$$m = 1{,}636 \text{ g}, \qquad v = 10 \text{ cm}^3.$$
$$t = \frac{1{,}636}{143{,}5} \times \frac{10\,000}{10} = \frac{1\,636}{143{,}5}.$$
$$t = 11{,}40 \text{ ions-g/l}.$$
$$M = 36{,}5 \times 11{,}40 = 416{,}1 \text{ g},$$
$$\mathbf{M = 416 \text{ g}.}$$

2° La solution d'acide chlorhydrique réagit sur la solution de soude pour donner du chlorure de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{H^+, Cl^-}_{\sim\sim} + \underbrace{Na^+, OH^-}_{\sim\sim} \rightarrow \underbrace{Na^+, Cl^-}_{\sim\sim} + H_2O,$$

ou plus simplement

$$H^+ + OH^- \rightarrow H_2O.$$

D'après cette équation, le point de neutralisation est obtenu lorsque le nombre d'ions-grammes H^+ contenus dans le volume $v = 15$ cm³ de la solution S est égal au nombre d'ions-grammes OH^- contenus dans le volume cherché v' cm³ de la solution de soude.

1 litre de la solution S renferme t ions-grammes Cl^- et par suite t ions-grammes H^+.

Le volume v en renferme donc $\frac{t \times v}{1\,000}$.

La masse molaire de la soude étant $23 + 16 + 1 = 40$ g, la solution de soude est une solution normale contenant 1 ion-gramme OH^- par litre. Le volume v' renferme donc $\frac{1 \times v'}{1\,000}$ ion-gramme OH^-.

Nous pouvons écrire l'équation

$$\frac{t \times v}{1\,000} = \frac{1 \times v'}{1\,000},$$

d'où nous tirons

$$v' = t \times v.$$

Application numérique :

$$t = 11{,}4 \text{ ions-g/l}, \qquad v = 15 \text{ cm}^3.$$
$$v' = 11{,}4 \times 15,$$
$$\mathbf{v' = 171 \text{ cm}^3.}$$

90. — Action d'une solution d'acide chlorhydrique sur de la limaille d'aluminium.

Un ballon contient de l'eau et de la limaille d'aluminium.

On verse progressivement dans le ballon une solution concentrée d'acide chlorhydrique contenant une masse d'acide pur $m = 100$ grammes.

La masse de l'aluminium est $m' = 50$ grammes.

1° Quel est le volume du gaz que l'on pourrait recueillir dans les conditions normales de température et de pression?

2° Quelle est la masse du sel d'aluminium que l'on pourrait obtenir par évaporation de la solution après dégagement de la totalité du gaz?

H = 1, Cl = 35,5, Al = 27, volume moléculaire normal V = 22,4 litres.

1° La solution d'acide chlorhydrique contient des ions H^+ qui réagissent sur l'aluminium pour donner des ions Al^{+++} et un dégagement d'hydrogène.

La réaction ionique, équilibrée au point de vue du nombre des atomes, s'écrit

$$6\,H^+ + 2\,Al \rightarrow 2\,Al^{+++} + 3\,H_2\nearrow.$$

Pour passer aux équations molaires, nous devons ajouter $6\,Cl^-$ aux deux membres:

$$6\,(H^+, Cl^-) + 2\,Al \rightarrow 2\,(Al^{+++}, 3\,Cl^-) + 3\,H_2\nearrow,$$

ou encore

$$(1) \qquad 6\,HCl + 2\,Al \rightarrow 2\,AlCl_3 + 3\,H_2\nearrow.$$

Si l'on prend 6 moles HCl et 2 atomes-grammes Al, ces deux corps disparaissent complètement. Le volume d'hydrogène dégagé est alors déterminé indifféremment (ainsi que la masse de chlorure d'aluminium formée) par la masse de l'un ou de l'autre des deux corps disparus.

Le texte donne des masses d'acide et de métal m et m' qui *a priori* ne satisfont pas à ces proportions : il y a un excès de l'un des deux corps. Le volume d'hydrogène dégagé sera alors déterminé par la masse de celui des deux corps qui disparaît complètement.

Il faut donc se poser la question suivante : quel est le corps qui disparaît complètement?

6 moles HCl représentent $6(1 + 35{,}5) = 6 \times 36{,}5 = 219$ g.

2 atomes-grammes Al représentent $2 \times 27 = 54$ g.

Ces masses sont dans un rapport bien déterminé.

Si les proportions de l'équation (1) étaient respectées, les masses m et m' devraient être dans le même rapport :

$$\frac{m}{m'} = \frac{219}{54}.$$

Pour une valeur donnée de m' nous devrions prendre une valeur m égale à

$$m = \frac{219}{54} \times m'.$$

Ce n'est pas le cas dans le problème proposé. Nous avons en effet $m = 2m'$ au lieu de $m = \frac{219}{54}m'$.

La masse d'acide chlorhydrique est inférieure à celle qu'elle devrait être pour réagir sur la totalité de l'aluminium.

C'est donc l'acide chlorhydrique qui disparaît complètement; le volume d'hydrogène dégagé est déterminé par la masse de cet acide.

Soit v ce volume mesuré dans les conditions normales. V étant le volume moléculaire normal, le nombre de moles H_2 est $\frac{v}{V}$.

D'après l'équation de réaction, le nombre de moles H_2 est égal aux $\frac{3}{6}$ du nombre de moles HCl. Écrivons cette égalité :

$$\frac{v}{V} = \frac{3}{6} \times \frac{m}{36,5},$$

d'où

$$v = \frac{3}{6} \times \frac{m}{36,5} \times V.$$

Application numérique :

$$m = 100\ g, \qquad V = 22,4 \text{ litres.}$$

$$v = \frac{3}{6} \times \frac{100}{36,5} \times 22,4 = 30,68 \text{ litres}, \qquad \boldsymbol{v = 30,7 \text{ litres.}}$$

2° Soit x la masse de chlorure d'aluminium formé.

D'après l'équation de réaction, le nombre de moles de chlorure d'aluminium est égal aux $\frac{2}{6}$ du nombre de moles d'acide chlorhydrique.

1 mole $AlCl_3$ a une masse de $27 + 3 \times 35,5 = 133,5$ grammes.

x grammes de chlorure d'aluminium contiennent $\frac{x}{133,5}$ moles.

Le nombre de moles HCl est $\frac{m}{36,5}$.

$$\frac{x}{133,5} = \frac{2}{6} \times \frac{m}{36,5}.$$

$$x = \frac{2}{6} \times \frac{m}{36,5} \times 133,5.$$

Application numérique :

$$m = 100 \text{ g.}$$

$$x = \frac{2}{6} \times \frac{100}{36,5} \times 133,5, \qquad \boldsymbol{x = 121,9 \text{ g.}}$$

91. — Étude de la fabrication industrielle de l'acide sulfurique.

En vue de fabriquer de l'acide sulfurique, on grille à l'air de la pyrite de fer FeS_2.

1° Écrire la réaction du grillage.

2° Quelle quantité de gaz sulfureux obtiendra-t-on à partir de 1 t de pyrite?

3° Quelle masse d'acide sulfurique à 66 % en masse pourra-t-on obtenir par la suite?

4° Quel volume d'air mesuré dans les conditions normales faudra-t-il employer pour ce grillage si l'on emploie le double de la quantité d'air strictement nécessaire au grillage ?

5° Quelle sera alors, en volumes, la composition des gaz sortant des fours de grillage ?

$N = 14$; $O = 16$; $S = 32$; $Fe = 56$.

Les candidats pourront adopter pour l'air une composition approchée, suffisante pour le problème posé.

1° Le grillage de la pyrite fournit de l'oxyde ferrique Fe_2O_3 et du dioxyde de soufre, ou anhydride sulfureux SO_2. Écrivons l'équation chimique sans indiquer les coefficients :

$$FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2.$$

Nous avons 2 atomes de fer dans Fe_2O_3. Il faut donc 2 FeS_2 au premier membre, et par suite 4 SO_2 au second membre. Le second membre contient 11 atomes d'oxygène. Il faut $\frac{11}{2}$ molécules d'oxygène au premier membre. L'équation de la réaction est donc

$$2\,FeS_2 + \frac{11}{2}O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + 4\,SO_2.$$

Pour éviter le coefficient fractionnaire, nous doublons tous les coefficients, ce qui nous donne

$$\mathbf{4\,FeS_2 + 11\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2.}$$

2° L'équation précédente permet de calculer la masse x d'anhydride sulfureux obtenue, connaissant la masse m de pyrite utilisée.

Pour avoir 8 moles SO_2, il faut prendre 4 moles FeS_2 : le nombre de moles SO_2 est égal au double du nombre de moles FeS_2.

La masse molaire de SO_2 étant de $32 + 16 \times 2 = 64$ g, x grammes SO_2 contiennent $\frac{x}{64}$ moles.

La masse molaire de FeS_2 étant de $56 + 32 \times 2 = 120$ g, m grammes FeS_2 contiennent $\frac{m}{120}$ moles.

Nous écrirons donc

$$\frac{x}{64} = 2 \times \frac{m}{120}.$$

$$x = 2 \times \frac{m}{120} \times 64.$$

Nous avons raisonné sur des grammes, mais la formule reste valable si m et x sont exprimés en kilogrammes.

Application numérique :

$$m = 1 \text{ tonne}, \quad \text{ou} \quad 1\,000 \text{ kg}.$$
$$x = 2 \times \frac{1\,000}{120} \times 64 = 1\,066 \text{ kg}, \qquad \boldsymbol{x = 1\,070 \text{ kg}.}$$

3° On peut obtenir de l'acide sulfurique à partir de l'anhydride sulfureux par divers moyens.

On peut d'abord oxyder SO_2 à l'état de SO_3, anhydride sulfurique, en présence d'oxyde de vanadium agissant comme catalyseur, puis hydrater SO_3 (procédé de contact).

Ou bien faire agir simultanément l'oxygène et l'eau sur SO_2, en présence d'oxydes d'azote agissant comme catalyseur (procédé des chambres de plomb).

Dans les deux cas, la réaction globale est la même :

$$SO_2 + \frac{1}{2} O_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4.$$

D'après cette réaction, le nombre de moles H_2SO_4 est égal au nombre de moles SO_2, lequel est égal à deux fois le nombre de moles de pyrite.

1 mole H_2SO_4 a une masse de $2 \times 1 + 32 + 4 \times 16 = 98$ g.

y grammes d'acide sulfurique à 66 % contiennent $\frac{66}{100} \times y$ grammes d'acide pur, lesquels contiennent $\frac{66}{100} \times \frac{y}{98}$ moles d'acide.

Le nombre de moles de pyrite étant égal à $\frac{m}{120}$, nous posons l'égalité

$$\frac{66}{100} \times \frac{y}{98} = 2 \times \frac{m}{120}.$$

Nous en déduisons

$$y = 2 \times \frac{m}{120} \times 98 \times \frac{100}{66}.$$

Si m est exprimé en kilogrammes, y sera aussi exprimé en kilogrammes.

Application numérique :

$$m = 1 \text{ tonne}, \quad \text{ou} \quad 1\,000 \text{ kg}.$$
$$y = 2 \times \frac{1\,000}{120} \times 98 \times \frac{100}{66} = \frac{980\,000}{396} = 2\,474 \text{ kg},$$
$$\boldsymbol{y = 2\,470 \text{ kg}.}$$

4° Pour réaliser la réaction de grillage théorique, il faut, d'après la formule de réaction, employer un nombre de moles O_2 égal à $\frac{11}{4}$ fois le nombre de moles FeS_2.

Soit v litres le volume d'air employé. Le volume d'air théoriquement nécessaire est $\frac{v}{2}$. L'air contenant $\frac{1}{5}$ de son volume d'oxygène et $\frac{4}{5}$

d'azote, la quantité d'oxygène nécessaire est

$$\frac{1}{5} \times \frac{v}{2} = \frac{v}{10} \text{ litres.}$$

Le volume molaire dans les conditions normales étant V_0 litres, le volume précédent contient $\frac{v}{10 \times V_0}$ moles.

Ce nombre est égal à $\frac{11}{4}$ fois le nombre de moles de pyrite $\frac{m}{120}$:

$$\frac{v}{10 \times V_0} = \frac{11}{4} \times \frac{m}{120}.$$

Cette relation nous donne v.

$$v = \frac{11}{4} \times \frac{m}{120} \times 10 \times V_0.$$

Application numérique :

$$m = 1 \text{ tonne}, \quad \text{ou} \quad 10^6 \text{ g}, \quad V_0 = 22{,}4 \text{ litres.}$$

$$v = \frac{11}{4} \times \frac{10^6}{120} \times 10 \times 22{,}4 = 5{,}133 \times 10^6 \text{ l},$$

$$\boldsymbol{v = 5\,130 \text{ m}^3}.$$

5° Le mélange gazeux sortant des fours où s'opère le grillage des pyrites contient : de l'azote, qui ne participe pas à la réaction, de l'oxygène en excès et de l'anhydride sulfureux.

Pour un volume v litres d'air utilisé il y a un volume d'azote égal à $\frac{4}{5} \times v$ litres, un volume d'oxygène n'ayant pas réagi égal à celui qui a réagi, soit $\frac{1}{10} \times v$ litres, enfin un volume d'anhydride sulfureux égal, d'après la réaction de grillage, à $\frac{8}{11}$ du volume d'oxygène employé, soit $\frac{8}{11} \times \frac{v}{10}$ litres.

Le volume total du mélange gazeux est

$$\frac{4}{5} \times v + \frac{1}{10} \times v + \frac{8}{110} \times v,$$

soit

$$\frac{88}{110} \times v + \frac{11}{110} \times v + \frac{8}{110} \times v = \frac{107}{110} \times v;$$

les proportions d'azote, d'oxygène et d'anhydride sulfureux sont alors les suivantes :

azote :

$$\frac{88}{107} \times 100 = \mathbf{82{,}2}\ \%,$$

oxygène :

$$\frac{11}{107} \times 100 = \mathbf{10{,}3}\ \%,$$

anhydride sulfureux :

$$\frac{8}{107} \times 100 = \mathbf{7{,}5}\ \%.$$

92. — Dosage volumétrique d'une ammoniaque.

On se propose de doser une solution A de gaz ammoniac ou ammoniaque, à l'aide d'une solution normale d'acide sulfurique. Pour cela, on verse 10 cm^3 de cette solution A dans un vase jaugé de 100 cm^3 que l'on achève de remplir avec de l'eau distillée. Après agitation, on prélève 10 cm^3 de cette solution diluée que l'on verse dans un bécher avec quelques gouttes de phtaléine. On constate que le virage de l'indicateur coloré s'effectue lorsque l'on a ajouté 12,5 cm^3 de solution normale d'acide dans le bécher.

1° Expliquer cette réaction de neutralisation.

2° Calculer le volume de gaz ammoniac que contient un litre de la solution A, ce volume étant mesuré dans les conditions normales de température et de pression.

3° Quelles sont la nature et la masse du sel obtenu par évaporation de la solution contenue dans le bécher?

Volume molaire normal : $V_0 = 22{,}4$ litres.

$S = 32$, $N = 14$, $O = 16$, $H = 1$.

1° Le gaz ammoniac, en solution dans l'eau, se combine partiellement à celle-ci pour donner des ions hydroxyde OH^- et des ions ammonium NH_4^+.

On aboutit à un équilibre :

$$(1) \qquad NH_3 + H_2O \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} NH_4^+ + OH^-.$$

L'ammoniaque a donc des propriétés basiques.

L'expérience montre que le nombre d'ions NH_4^+ formés n'est qu'une fraction du nombre de molécules NH_3, d'autant plus faible que la solution est plus concentrée.

La solution basique contient donc peu d'ions OH^- : l'ammoniaque est une base faible.

Lorsque l'on verse goutte à goutte la solution normale d'acide sulfurique dans la solution diluée, les ions H^+ de l'acide se combinent aux ions OH^- de la base pour donner de l'eau :

$$(2) \qquad H^+ + OH^- \rightarrow H_2O.$$

Par suite de l'élimination des ions OH^-, l'équilibre (1) est déplacé : la réaction se poursuit dans le sens 1, en régénérant les ions OH^- jusqu'à

ce que la totalité des molécules NH_3 soit transformée en ions NH_4^+ :

(3) $$NH_3 + H_2O \rightarrow NH_4^+ + OH^-.$$

Il suffit alors d'ajouter une goutte de solution acide pour produire le virage de la phtaléine.

La réaction globale s'obtient en ajoutant les équations (2) et (3) :

(4) $$NH_3 + H^+ \rightarrow NH_4^+.$$

En évaporant la solution, on obtient des cristaux de sulfate neutre d'ammonium $(NH_4)_2SO_4$, ou sulfate diammonique.

2° Soit x la concentration de la solution A, évaluée en moles NH_3 par litre.

La solution diluée contient $\frac{x}{10}$ moles NH_3 par litre.

D'après l'équation (4), le nombre de moles NH_3 contenues dans le volume $v = 10$ cm³ de l'ammoniaque diluée est égal au nombre de moles H^+ contenues dans le volume $v' = 12{,}5$ cm³ de la solution normale d'acide sulfurique.

Le volume v de solution basique contient

$$\frac{x}{10} \times \frac{v}{1\,000} \text{ moles } NH_3.$$

La solution d'acide sulfurique est une solution normale, contenant par conséquent 1 ion-gramme H^+, ou 1 mole d'ions H^+, par litre.

Le volume v' de solution acide contient

$$\frac{1 \times v}{1\,000} = \frac{v'}{1\,000} \text{ moles } H^+.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{x}{10} \times \frac{v}{1\,000} = \frac{v'}{1\,000},$$

d'où nous tirons

$$x = 10\,\frac{v'}{v}.$$

Une mole NH_3 occupe le volume V_0 dans les conditions normales de température et de pression.

Le volume V de gaz ammoniac contenu dans 1 litre de la solution A est donc

$$V = V_0 \times x.$$

Application numérique :

$$v = 10 \text{ cm}^3, \qquad v' = 12{,}5 \text{ cm}^3.$$

$$x = 10 \times \frac{12{,}5}{10} = 12{,}5 \text{ moles } NH_3 \text{ par litre,}$$

$$V = 22{,}4 \times 12{,}5,$$

$$\mathbf{V = 280 \text{ litres.}}$$

3° Le nombre de moles $(NH_4)_2SO_4$ contenues dans le bécher à la fin de la réaction est la moitié du nombre de moles NH_3 contenues dans le volume v cm³ de la solution basique diluée, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \times \frac{x}{10} \times \frac{v}{1\,000} = \frac{1}{2} \times \frac{v'}{1\,000}.$$

La masse molaire du sel étant

$$2(14 + 4) + 32 + 4 \times 16 = 132 \text{ g},$$

on obtient, après évaporation de la solution, une masse de sulfate diammonique égale à

$$m = 132 \times \frac{1}{2} \times \frac{v'}{1\,000} = \frac{132\,v'}{2\,000}.$$

Application numérique :

$$v' = 12{,}5 \text{ cm}^3.$$

$$m = \frac{132 \times 12{,}5}{2\,000},$$

$$\boldsymbol{m = 0{,}825 \text{ g}}.$$

93. — Préparation des deux carbonates de sodium.

On fait passer longuement un courant de dioxyde de carbone CO_2 dans 50 cm³ de solution normale de soude. On observe la formation d'un précipité blanc.

A la solution précédente, on ajoute un même volume, 50 cm³, de la même solution de soude. On constate que le précipité disparaît. Par évaporation, on obtient des cristaux incolores.

On demande :

1° d'expliquer ces réactions;

2° de calculer la masse des cristaux incolores formés.

1° Le dioxyde de carbone, en solution dans l'eau, a une double fonction acide, correspondant aux deux équilibres

$$CO_2 + H_2O \rightleftarrows H^+ + HCO_3^-,$$
$$HCO_3^- \rightleftarrows H^+ + CO_3^{--}.$$

Par action de la soude, la solution de CO_2 peut donner naissance à deux sortes de sels :

— l'hydrogénocarbonate de sodium, ou carbonate acide de sodium, de formule $NaHCO_3$ ou Na^+, HCO_3^-, sel peu soluble dans l'eau,

— le carbonate neutre de sodium, de formule Na_2CO_3 ou $2Na^+CO_3^{--}$, sel très soluble dans l'eau.

En présence d'un excès de CO_2, seul se forme l'hydrogénocarbonate

de sodium, qui précipite partiellement sous la forme d'un précipité blanc :

$$CO_2 + \underbrace{Na^+, OH^-} \rightarrow \underbrace{Na^+, HCO_3^-},$$

équation que l'on peut écrire, en supprimant les ions qui ne participent pas à la réaction,

(1) $$CO_2 + OH \rightarrow HCO_3^-.$$

Lorsque l'on ajoute un même volume de solution normale de soude, l'hydrogénocarbonate de sodium se transforme en carbonate neutre :

$$\underbrace{Na^+, HCO_3^-} + \underbrace{Na^+, OH^-} \rightarrow \underbrace{2\,Na^+, CO_3^{--}} + H_2O$$

ou plus simplement

(2) $$HCO_3^- + OH^- \rightarrow CO_3^{--} + H_2O.$$

Par addition des équations (1) et (2), on obtient l'équation représentant la réaction globale :

(3) $$CO_2 + 2\,OH^- \rightarrow CO_3^{--} + H_2O.$$

La solution obtenue laisse déposer par évaporation des cristaux incolores de carbonate neutre de sodium décahydraté de formule

$$Na_2CO_3,\ 10\,H_2O.$$

2° La réaction globale (3) montre que le nombre d'ions-grammes CO_3^{--} est égal à la moitié du nombre d'ions-grammes OH^- contenus dans le volume total $v = 50 \times 2 = 100$ cm³ de solution normale de soude.

Cette solution renfermant 1 ion-gramme OH^- par litre, le volume v contient $\frac{1 \times v}{1\,000}$ ion-gramme OH^-. Il y a donc formation de $\frac{v}{2\,000}$ ion-gramme CO_3^{--}, correspondant à $\frac{v}{2\,000}$ mole $Na_2CO_3,\ 10\,H_2O$.

La masse de cette mole étant de

$$23 \times 2 + 12 + 16 \times 3 + 18 \times 10 = 286\ \text{g},$$

la masse des cristaux formés est

$$m = 286 \times \frac{v}{2\,000}\ \text{g}.$$

Application numérique :

$$v = 100\ \text{cm}^3.$$

$$m = 286 \times \frac{100}{2\,000},$$

$$\boldsymbol{m = 14{,}3\ \text{g}}.$$

94. — Analyse d'un mélange de carbonates de calcium et de manganèse.

Un échantillon d'un mélange de carbonates de calcium et de manganèse a une masse $m = 10$ g.

On traite cet échantillon par de l'acide chlorhydrique en excès et l'on recueille un volume $v = 2\,172{,}8$ cm^3 de gaz mesuré dans les conditions normales.

Quelle est, en moles et en grammes, la composition de cet échantillon ?

Le volume moléculaire pris dans les conditions normales vaut $V = 22\,400$ cm^3.

$$C = 12, \qquad O = 16, \qquad Ca = 40, \qquad Mn = 55.$$

Désignons par x et y les nombres de moles de carbonates de calcium et de manganèse dans m grammes de mélange.

Une mole $CaCO_3$ a pour masse $40 + 12 + 3 \times 16 = 100$ g.
Une mole $MnCO_3$ a pour masse $55 + 12 + 3 \times 16 = 115$ g.

Les masses de carbonates de calcium et de manganèse contenues dans m g valent respectivement

$$x \times 100 \text{ g} \qquad \text{et} \qquad y \times 115 \text{ g}.$$

La composition du mélange fournit donc la première équation du problème :

$$100\,x + 115\,y = m.$$

L'acide chlorhydrique réagit sur le carbonate de calcium pour donner l'acide carbonique H_2CO_3, qui se décompose en $CO_2 + H_2O$, et du chlorure de calcium Ca^{++}, $2\,Cl^-$:

$$x\,CaCO_3 + 2x\,\underbrace{(H^+,\ Cl^-)} \rightarrow x\,CO_2 + x\,H_2O + x\,\underbrace{(Ca^{++},\ 2\,Cl^-)},$$

ou plus simplement

$$(1) \qquad x\,CaCO_3 + 2x\,H^+ \rightarrow x\,CO_2 + x\,H_2O + x\,Ca^{++}.$$

L'acide chlorhydrique réagit de même sur le carbonate de manganèse :

$$(2) \qquad y\,MnCO_3 + 2y\,H^+ \rightarrow y\,CO_2 + y\,H_2O + y\,Mn^{++}.$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons la réaction globale

$$x\,CaCO_3 + y\,MnCO_3 + 2(x + y)H^+ \rightarrow (x + y)CO_2 + (x + y)H_2O + x\,Ca^{++} + y\,Mn^{++}.$$

D'après cette réaction, le nombre de moles CO_2 dégagé est égal à la somme des nombres de moles $CaCO_3$ et $MnCO_3$.

Le volume CO_2 dégagé, dans les conditions normales, est v cm³.
Le volume moléculaire, dans les conditions normales, est V cm³.
Le nombre de moles CO_2 est alors $\frac{v}{V}$.

La deuxième équation du problème est donnée par l'égalité

$$x + y = \frac{v}{V}.$$

Nous pouvons alors calculer x et y et en déduire les masses des deux carbonates.

Application numérique :

$$m = 10 \text{ g}; \qquad v = 2\,172{,}8 \text{ cm}^3; \qquad V = 22\,400 \text{ cm}^3;$$

$$\frac{v}{V} = \frac{2\,172{,}8}{22\,400} = 0{,}097.$$

(1) $$100x + 115y = 10,$$
$$x + y = 0{,}097.$$

Multiplions les deux membres de cette dernière équation par 100 :

(2) $$100x + 100y = 9{,}7.$$

Retranchons (2) de (1) :

$$15y = 0{,}3,$$
$$y = \frac{0{,}3}{15} = \frac{2}{100}, \qquad \mathbf{y = 0{,}02.}$$
$$x = 0{,}097 - y = 0{,}097 - 0{,}02, \qquad \mathbf{x = 0{,}077.}$$

Les masses de carbonates ont pour valeur :

$$x \times 100 = 0{,}077 \times 100, \qquad \mathbf{7{,}7 \text{ g } CaCO_3},$$
$$y \times 115 = 0{,}02 \times 115, \qquad \mathbf{2{,}3 \text{ g } MnCO_3}.$$

95. — Oxydation de l'oxyde de carbone par l'oxyde de cuivre.

On fait passer 560 cm³ d'oxyde de carbone, mesurés dans les conditions normales de température et de pression, dans un tube chauffé contenant 3,98 g d'oxyde de cuivre.

Le gaz dégagé est agité à plusieurs reprises avec de l'eau de chaux en excès. On recueille 2 g de précipité. On demande :

1° d'écrire les équations relatives aux réactions qui se sont réalisées;

2° la composition centésimale en volume des gaz à la sortie du tube;

3° la composition centésimale en masse du contenu du tube après le passage du gaz.

Ca = 40, Cu = 63,6, C = 12.

1° L'oxyde de carbone réduit l'oxyde de cuivre en donnant du cuivre et du dioxyde de carbone CO_2 :

(1) $$CuO + CO \rightarrow Cu + CO_2.$$

L'eau de chaux contient les ions Ca^{++} et OH^-. On peut admettre que le dioxyde de carbone réagit d'abord sur les ions OH^- pour donner des ions CO_3^{--} :

$$CO_2 + 2\,OH^- \rightarrow CO_3^{--} + H_2O.$$

Les ions CO_3^{--} s'unissent ensuite aux ions Ca^{++} pour former un précipité de carbonate de calcium :

$$Ca^{++} + CO_3^{--} \rightarrow \underline{\underset{\downarrow}{CaCO_3}}.$$

Ces deux réactions sont simultanées. L'équation globale s'écrit

(2) $$\mathbf{Ca^{++} + CO_2 + 2\,OH^- \rightarrow \underline{\underset{\downarrow}{CaCO_3}} + H_2O.}$$

2° A la sortie du tube, le mélange gazeux comprend CO_2 provenant de la réduction de l'oxyde de cuivre et CO en excès.

Soit v le volume initial de CO et v_1 le volume de CO_2 qui s'est formé. Le volume de CO qui a réagi est aussi v_1.

Le volume de CO qui n'a pas participé à la réaction est $v - v_1$.

Pour déterminer v_1, volume de CO_2 formé, il faut faire appel à la deuxième réaction.

D'après cette réaction, le nombre de moles CO_2 est égal au nombre de moles $CaCO_3$.

Une mole CO_2 occupe un volume V. Le volume v_1 contient $\frac{v_1}{V}$ moles.

Une mole $CaCO_3$ a une masse de $40 + 12 + 3 \times 16 = 100$ g.

La masse m_1 de $CaCO_3$ précipité contient $\frac{m_1}{100}$ moles :

$$\frac{v_1}{V} = \frac{m_1}{100}.$$

Le volume de CO_2 est donc

$$v_1 = \frac{m_1}{100} \times V.$$

Le volume de CO qui a réagi est donc

$$v_1 = \frac{m_1}{100} \times V.$$

Le volume de CO restant est

$$v - v_1 = v - \frac{m_1}{100} \times V.$$

Le volume total du mélange est

$$v_1 + v - v_1 = v.$$

La composition centésimale est alors la suivante :

volume de CO_2 : $\frac{v_1}{v} \times 100 = \frac{m_1}{100} \times \frac{V}{v} \times 100$;

volume de CO : $\frac{v - v_1}{v} \times 100 = \left(1 - \frac{m_1}{100} \times \frac{V}{v}\right) 100.$

Application numérique :

$m_1 = 2$ g, $V = 22\,400$ cm³, $v = 560$ cm³.

$\frac{v_1}{v} \times 100 = \frac{2}{100} \times \frac{22\,400}{560} \times 100$, soit **80 % CO_2.**

$\frac{v - v_1}{v} \times 100 = \left(1 - \frac{2}{100} \times \frac{22\,400}{560}\right) 100$, soit **20 % CO.**

3° Le résidu solide contenu dans le tube après passage de CO est formé de cuivre provenant de la réduction de CuO et de CuO en excès.

Soit x la masse de cuivre formé et y la masse de CuO en excès. Si m désigne la masse initiale de CuO, la masse de ce corps qui a réagi est $m - y$.

Pour déterminer x et y, nous écrirons les deux égalités données par la formule de réaction (1) :

Nombre de moles Cu = Nombre de moles CO_2.
Nombres de mole CuO = Nombre de moles CO_2.

Exprimons ces nombres de moles.

Le nombre de moles Cu est $\frac{x}{63,6}$. Le nombre de moles CuO est $\frac{m - y}{63,6 + 16} = \frac{m - y}{79,6}$. Le nombre de moles CO_2 est (voir question 2°) $\frac{v_1}{V} = \frac{m_1}{100}$.

Les deux équations permettant de calculer x et y sont les suivantes :

$$\frac{x}{63,6} = \frac{m_1}{100}$$

et

$$\frac{m - y}{79,6} = \frac{m_1}{100}.$$

Elles admettent pour solution :

$$x = \frac{m_1}{100} \times 63,6$$

et

$$y = m - \frac{m_1}{100} \times 79,6.$$

La masse résiduelle totale étant $x + y$, la composition centésimale est alors la suivante :

masse de Cu,

$$\frac{x}{x+y} \times 100 = \frac{m_1 \times 63{,}6}{m_1 \times 63{,}6 + 100\,m - m_1 \times 79{,}6} \times 100;$$

masse de CuO,

$$\frac{y}{x+y} \times 100 = \frac{100\,m - m_1 \times 79{,}6}{m_1 \times 63{,}6 + 100\,m - m_1 \times 79{,}6} \times 100.$$

Application numérique :

$$m = 3{,}98 \text{ g}; \qquad m_1 = 2 \text{ g}.$$

$$\frac{x}{x+y} \times 100 = \frac{2 \times 63{,}6 \times 100}{2 \times 63{,}6 + 100 \times 3{,}98 - 2 \times 79{,}6} = \frac{12\,720}{366},$$

soit **34,75 % Cu.**

$$\frac{y}{x+y} \times 100 = \frac{(100 \times 3{,}98 - 2 \times 79{,}6) \times 100}{2 \times 63{,}6 + 100 \times 3{,}98 - 2 \times 79{,}6} = \frac{23\,880}{366},$$

soit **65,25 % CuO.**

CHAPITRE XXII

Chimie
Réactions d'oxydo-réduction

96. — Action de l'acide chlorhydrique sur le fer. Oxydation du chlorure ferreux par le chlore.

1° On fait agir une solution d'acide chlorhydrique sur une masse $m = 4{,}48$ g de fer pur jusqu'à disparition complète du métal.

a) Écrire l'équation de la réaction. Montrer que l'on peut considérer celle-ci comme une oxydo-réduction.

b) Calculer le volume du gaz qui se dégage, mesuré dans les conditions normales de température et de pression.

2° On divise la solution obtenue en deux parties, A et B. On verse dans A une solution de soude en excès et l'on obtient un précipité vert.

On fait passer un courant de chlore dans la solution B, puis on ajoute de la soude en excès et l'on obtient un précipité rouille.

a) Expliquer les réactions précédentes.

b) Calculer la masse des précipités vert et rouille obtenus, après filtration et dessiccation.

$$O = 16, \qquad H = 1, \qquad Fe = 56.$$

Volume moléculaire normal : $V_0 = 22{,}4$ litres.

1° La solution d'acide chlorhydrique attaque le fer en donnant du chlorure ferreux et de l'hydrogène :

$$Fe + 2(H^+, Cl^-) \rightarrow Fe^{++}, 2\,Cl^- + H_2\nearrow,$$

ou, si nous éliminons dans les deux membres les ions qui ne participent pas à la réaction

$$(1) \qquad Fe + 2\,H^+ \rightarrow Fe^{++} + H_2\nearrow.$$

Cette réaction peut être considérée comme une oxydo-réduction.
En effet, chaque atome de fer se transforme en un ion ferreux Fe^{++}

en cédant deux électrons :

(2) $$Fe \rightarrow Fe^{++} + 2\,e^{-}.$$

Les ions H^+ captent ces électrons et se transforment en molécules H_2 :

(3) $$2\,H^+ + 2e^{-} \rightarrow H_2.$$

La réaction (2), qui correspond à une perte d'électrons, est une oxydation.

La réaction (3), qui correspond à un gain d'électrons, est une réduction.

La réaction globale (1), que l'on obtient en additionnant (2) et (3), est bien une oxydo-réduction.

2° La réaction (1) montre que le nombre de moles H_2 est égal au nombre d'atomes-grammes de fer contenus dans la masse m grammes. Ce nombre est $\frac{m}{56}$.

Le volume de gaz dégagé, c'est-à-dire le volume d'hydrogène, mesuré dans les conditions normales de température et de pression, est

$$v = V_0 \times \frac{m}{56}.$$

Application numérique :

$$V_0 = 22{,}4 \text{ litres}, \qquad m = 4{,}48 \text{ grammes}.$$

$$v = 22{,}4 \times \frac{4{,}48}{56} = 1{,}792 \text{ litre},$$

$$\boldsymbol{v = 1{,}79 \text{ l.}}$$

2° *a*) *Solution* A.

La solution A contient des ions ferreux Fe^{++}. Lorsqu'on y verse une solution de soude, on introduit des ions OH^- qui réagissent sur les ions ferreux pour donner un précipité vert d'hydroxyde ferreux :

(4) $$Fe^{++} + 2\,OH^- \rightarrow \underline{Fe(OH)_2}\downarrow.$$

Solution B.

Sous l'action du chlore, les ions ferreux Fe^{++} se transforment en ions ferriques Fe^{+++} en perdant chacun un électron :

(5) $$Fe^{++} \rightarrow Fe^{+++} + e^{-}.$$

Cet électron se fixe sur un atome de chlore et le transforme en ion chlorure Cl^-. La molécule de chlore comportant deux atomes, nous écrirons

(6) $$Cl_2 + 2\,e^{-} \rightarrow 2\,Cl^-.$$

La réaction (5), qui correspond à une perte d'électrons, est une oxydation.

La réaction (6), qui correspond à un gain d'électrons, est une réduction.

La réaction globale est une oxydo-réduction. On obtient son équation en ajoutant membre à membre les équations (5) et (6), après avoir multiplié la première par 2 :

(7) $$2\,Fe^{++} + Cl_2 \rightarrow 2\,Fe^{+++} + 2\,Cl^-.$$

Lorsqu'on ajoute de la soude à la solution oxydée on introduit des ions OH^- qui réagissent sur les ions Fe^{+++} pour donner un précipité rouille d'hydroxyde ferrique :

(8) $$Fe^{+++} + 3\,OH^- \rightarrow \underline{Fe(OH)_3}\downarrow.$$

b) L'équation (4) montre que le nombre de moles $Fe(OH)_2$ est égal au nombre de moles Fe^{++} contenues dans la solution A, lui-même égal à la moitié du nombre de moles Fe contenues dans la masse donnée m grammes. Ce nombre est donc égal à $\frac{1}{2} \times \frac{m}{56}$.

La masse molaire de l'hydroxyde ferreux étant

$$56 + 2(16 + 1) = 90 \text{ g},$$

la masse du précipité vert, filtré et séché, est

$$m_1 = \frac{1}{2} \times \frac{m}{56} \times 90 \text{ g}.$$

Par ailleurs, les équations (7) et (8) montrent que le nombre de moles $Fe(OH)_3$ est égal au nombre de moles Fe^{+++} contenues dans la solution B, lui-même égal au nombre de moles Fe^{++} contenues dans la solution A.

Ce nombre est donc égal à $\frac{1}{2} \times \frac{m}{56}$.

La masse molaire de l'hydroxyde ferrique étant

$$56 + 3(16 + 1) = 107 \text{ g},$$

la masse du précipité rouille, filtré et séché, est

$$m_2 = \frac{1}{2} \times \frac{m}{56} \times 107 \text{ g}.$$

Application numérique :

$$m = 4{,}48 \text{ g}.$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4{,}48}{56} \times 90 = 0{,}04 \times 90, \qquad \boldsymbol{m_1 = 3{,}60 \text{ g}.}$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4{,}48}{56} \times 107 = 0{,}04 \times 107, \qquad \boldsymbol{m_2 = 4{,}28 \text{ g}.}$$

Remarque. — Dans l'équation (1), le nombre d'oxydation du fer est passé de 0 à + 2. Il a donc varié de + 2 − 0 = + 2 : le fer a été oxydé.

Le nombre d'oxydation de l'hydrogène est passé de + 1 à 0. Il a varié de 0 − (+ 1) = − 1 : l'hydrogène a été réduit.

La réaction est une oxydo-réduction.

Nous vérifions que la variation du nombre d'oxydation de l'atome de fer, + 2, est égal et de signe contraire à la variation du nombre d'oxydation des deux atomes d'hydrogène : $2(-1) = -2$.

97. — Oxydation de l'acide chlorhydrique par le dioxyde de manganèse.

On attaque 1 gramme de dioxyde de manganèse naturel par une solution d'acide chlorhydrique jusqu'à la disparition du minerai. Il se dégage un gaz qui, à la température de 20 °C et sous la pression 74 cm^3 de mercure, occupe un volume de 205 cm^3.

1° Expliquer la réaction.

2° Déterminer le titre en dioxyde de manganèse pur du minerai naturel.

Volume molaire normal : $V_0 = 22{,}4$ litres.

$$O = 16, \quad H = 1, \quad Cl = 35{,}5, \quad Mn = 55.$$

1° En milieu acide, c'est-à-dire en présence d'ions H^+, le dioxyde de manganèse MnO_2 est un oxydant énergique. Il est réduit à l'état d'ion manganeux Mn^{++} tandis que les ions H^+ forment des molécules d'eau.

La réaction, équilibrée au point de vue du nombre des atomes, s'écrit

$$MnO_2 + 4H^+ \rightarrow Mn^{++} + 4H_2O.$$

Équilibrons cette réaction au point de vue des charges.

Dans le premier membre, nous avons 4 charges positives et 2 seulement au second membre. Nous devons donc ajouter $2\,e^-$ au premier membre :

(1) $$MnO_2 + 4\,H^+ + 2\,e^- \rightarrow Mn^{++} + 4\,H_2O.$$

Le mélange $MnO_2 + 4\,H^+$ a capté des électrons : il joue le rôle d'oxydant.

Les ions chlorure Cl^- sont transformés en molécules Cl_2 :

$$2\,Cl^- \rightarrow Cl_2.$$

Équilibrons cette réaction au point de vue des charges. Nous devons ajouter $2\,e^-$ au second membre :

(2) $$2\,Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2\,e^-.$$

Les ions chlorure Cl^- ont cédé des électrons : ils jouent le rôle de réducteur.

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons la réaction globale, qui est une oxydo-réduction :

(3) $$MnO_2 + 4H^+ + 2\,Cl^- \rightarrow Mn^{++} + 2\,H_2O + Cl_2\uparrow.$$

Pour obtenir l'équation molaire, nous ajouterons $2\,Cl^-$ aux deux membres :

$$MnO_2 + 4(H^+,\ Cl^-) \rightarrow Mn^{++}\,2\,Cl^- + 2\,H_2O + Cl_2\uparrow,$$

ou encore

$$(4) \qquad MnO_2 + 4\,HCl \rightarrow MnCl_2 + 2\,H_2O + Cl_2\uparrow.$$

2° Soit m' la masse de dioxyde de manganèse pur contenue dans la masse donnée, $m = 1$ gramme, du minerai. Le titre, t, de ce dernier est

$$t = \frac{m'}{m}.$$

La masse m' peut se déterminer à partir du volume v de chlore dégagé.

D'après l'équation (3), une mole MnO_2 donne naissance à une mole Cl_2. Le nombre de moles MnO_2 qui ont réagi est donc égal au nombre de moles Cl_2 qui se sont formées.

La masse molaire de MnO_2 étant $55 + 16 \times 2 = 87$ g, le nombre de moles MnO_2 qui ont réagi est égal à $\frac{m'}{87}$.

Par ailleurs, le volume v de chlore gazeux recueilli à la pression p et à la température absolue T, donne, ramené aux conditions normales (pression p_0, température T_0), un volume v_0 tel que $v_0 = v \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}$.

Si V_0 est le volume molaire normal, le nombre de moles Cl_2 que l'on a recueillies est

$$\frac{v_0}{V_0} = \frac{v}{V_0} \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}.$$

Écrivons l'égalité du nombre de moles MnO_2 et du nombre de moles Cl_2 :

$$\frac{m'}{87} = \frac{v}{V_0} \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}, \qquad \text{d'où} \qquad m' = 87 \times \frac{v}{V_0} \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}.$$

Le titre du minerai est donc

$$t = \frac{m'}{m} = \frac{87}{m} \times \frac{v}{V_0} \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}.$$

Application numérique :

$$m = 1 \text{ gramme},$$

$v = 205$ cm³, $V_0 = 22{,}4$ l, ou $22\,400$ cm³, $p_0 = 76$ cm de mercure, $p = 74$ cm de mercure, $T = 273 + 20 = 293$ °K, $T_0 = 273$ °K.

$$t = \frac{87}{1} \times \frac{205}{22\,400} \times \frac{74}{76} \times \frac{273}{293} = 0{,}722\,3.$$

$$\boldsymbol{t = 72{,}2\ \%}.$$

Remarque. — Cherchons les variations des nombres d'oxydation des différents éléments qui participent à la réaction.

Dans l'équation (3), les nombres d'oxydation de l'oxygène et de l'hydrogène n'ont pas changé.

Le nombre d'oxydation du manganèse est passé de $+4$ à $+2$. Il a donc varié de $+2 - (+4) = -2$: le manganèse a été réduit.

Le nombre d'oxydation du chlore est passé de -1 à 0. Il a donc varié de $0 - (-1) = +1$: le chlore a été oxydé.

La réaction est une oxydo-réduction.

Nous vérifions que la variation du nombre d'oxydation de l'atome de manganèse, -2, est égale et de signe contraire à la variation du nombre d'oxydation des deux atomes de chlore, $2(+1) = +2$.

98. — Réduction d'une solution de sulfate ferrique par le dioxyde de soufre.

1° On grille 18 g de pyrite pure. Quel est le volume de dioxyde de soufre formé, mesuré dans les conditions normales de température et de pression ?

2° On fait arriver ce gaz dans une solution de sulfate ferrique. Il se produit une réaction d'oxydo-réduction que l'on demande d'expliquer.

3° La solution de sulfate ferrique contient 200 grammes de ce sel. Calculer les masses des différents corps que contient la solution à la fin de l'expérience.

Volume molaire normal : $V_0 = 22{,}4$ litres.

$$O = 16, \qquad S = 32, \qquad Fe = 56.$$

1° Lorsque l'on grille la masse m g de pyrite, il se forme de l'oxyde ferrique Fe_2O_3 et il se dégage un volume v de dioxyde de soufre, conformément à l'équation (prob. n° 91)

$$4\,FeS_2 + 11\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2.$$

Cette équation montre que le nombre de moles SO_2 formées est le double du nombre de moles FeS_2 contenues dans la masse m.

La masse molaire de FeS_2 étant

$$56 + 32 \times 2 = 120 \text{ g},$$

le nombre de moles FeS_2 est $\frac{m}{120}$.

Le nombre de moles SO_2 est donc $2 \times \frac{m}{120} = \frac{m}{60}$.

Le volume molaire normal étant V_0, le volume v de dioxyde de soufre qui se dégage, mesuré dans les conditions normales de température et de pression, est

$$v = V_0 \times \frac{m}{60}.$$

Application numérique :

$$m = 18 \text{ g}, \qquad V_0 = 22{,}4 \text{ l.}$$
$$v = 22{,}4 \times \frac{18}{60} = 22{,}4 \times \frac{3}{10}. \qquad \boldsymbol{v = 6{,}72 \text{ l.}}$$

2° La solution de SO_2 a des propriétés réductrices. En présence d'un oxydant, il se forme un ion SO_4^{--} et des ions H^+. Cette réaction, équilibrée au point de vue du nombre des atomes, est représentée par l'équation

$$SO_2 + 2\,H_2O \rightarrow SO_4^{--} + 4\,H^+.$$

Équilibrons les charges dans les deux membres.

La charge du premier membre est nulle. Celle du second membre est $-2 + 4 = +2$.

Il faut donc ajouter 2 électrons au second membre, ce qui donne

$$SO_2 + 2\,H_2O \rightarrow SO_4^{--} + 4\,H^+ + 2\,e^-.$$

La solution de sulfate ferrique contient l'ion Fe^{+++}. En présence de SO_2, cet ion est réduit à l'état d'ion ferreux, conformément à l'équation

$$Fe^{+++} + e^- \rightarrow Fe^{++}.$$

Nous doublons les coefficients de cette équation pour obtenir le même nombre d'électrons que dans l'équation (1) :

(2) $$2\,Fe^{+++} + 2\,e^- \rightarrow 2\,Fe^{++}.$$

Si nous ajoutons membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons l'équation globale

(3) $$SO_2 + 2\,H_2O + 2\,Fe^{+++} \rightarrow 2\,Fe^{++} + 4\,H^+ + SO_4^{--}.$$

Pour passer aux équations molaires, nous ajoutons trois ions SO_4^{--} à chaque membre, et nous obtenons finalement

$$SO_2 + 2\,H_2O + Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow 2\,FeSO_4 + 2\,H_2SO_4.$$

3° Quand on envoie SO_2 dans la solution de $Fe_2(SO_4)_3$, la réaction se poursuit jusqu'à disparition complète des deux corps si leurs proportions sont celles de la formule de réaction, ou seulement d'un des deux corps si l'autre est en excès. Il s'agit donc d'abord de voir lequel des deux corps SO_2 ou $Fe_2(SO_4)_3$ est en excès.

La réaction indique qu'une mole SO_2 réagit sur une mole $Fe_2(SO_4)_3$. Or nous disposons d'un nombre de moles SO_2 égal à $\frac{v}{V_0} = 2 \times \frac{m}{120}$ et d'un nombre de moles $Fe_2(SO_4)_3$ égal à la masse m' grammes $Fe_2(SO_4)_3$ divisée par la masse molaire, M, de ce corps :

$$M = 2 \times 56 + 3(32 + 4 \times 16) = 400,$$
$$\frac{m'}{M} = \frac{m'}{400}.$$

Si $m' = 200$ g et $m = 18$ g, le nombre de moles SO_2, $\frac{2 \times 18}{120} = \frac{3}{10}$, est inférieur au nombre de moles $Fe_2(SO_4)_3$, $\frac{200}{400} = \frac{5}{10}$; il y a excès de sulfate ferrique.

La solution, à la fin de l'expérience, contient l'acide sulfurique ainsi que le sulfate ferreux formés et l'excès de sulfate ferrique.

Le nombre de moles H_2SO_4 formées est égal à deux fois le nombre de moles SO_2, soit

$$2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

Le nombre de moles $FeSO_4$ formées est aussi égal à deux fois le nombre de moles SO_2, soit

$$2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

Le nombre de moles $Fe_2(SO_4)_3$ en excès est égal à

$$\frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10}.$$

Les masses molaires de ces trois corps étant respectivement 98 g, 152 g et 400 g, la solution contient, à la fin de l'expérience :

masse d'acide sulfurique $m_1 = \frac{6}{10} \times 98$, $\boldsymbol{m_1 = 58{,}8\ g}$;

masse de sulfate ferreux $m_2 = \frac{6}{10} \times 152$, $\boldsymbol{m_2 = 91{,}2\ g}$;

masse de sulfate ferrique $m_3 = \frac{2}{10} \times 400$, $\boldsymbol{m_3 = 80\ g}$.

Remarque. — Dans l'équation (3), les nombres d'oxydation de l'oxygène et de l'hydrogène n'ont pas changé.

Le nombre d'oxydation du fer est passé de $+3$ à $+2$. Il a varié de $+2 - (+3) = -1$: le fer a été réduit.

Le nombre d'oxydation du soufre est passé de $+4$ à une valeur x telle que $x + 4(-2) = -2$, ou $x = +6$. Il a varié de $+6 - (+4) = +2$: le soufre a été oxydé.

Nous vérifions que la variation du nombre d'oxydation des 2 atomes de fer, $2(-1) = -2$, est égale et de signe contraire à la variation du nombre d'oxydation du soufre, $+6 - (+4) = +2$.

99. — Action de l'acide nitrique sur le cuivre. Détermination de la formule des cristaux obtenus.

On fait agir dans un flacon un volume $v = 60$ cm³ de solution normale d'acide nitrique sur une masse $m = 4{,}00$ g de cuivre, et l'on recueille le gaz qui se dégage

dans une éprouvette, préalablement remplie d'eau, retournée sur la cuve à eau.

1° Décrire et expliquer la réaction. Quelle est la nature du gaz contenu dans l'éprouvette ?

2° Montrer que cette réaction est une oxydo-réduction et établir son équation électronique. En déduire l'équation molaire.

3° Lorsque le dégagement gazeux a cessé, on filtre le contenu du flacon. Préciser la nature et la masse du solide qui est retenu par le filtre.

4° On fait évaporer lentement la solution filtrée, et on obtient des cristaux bleus qui, une fois séchés, ont une masse de 6,65 g. Quelle est la composition de ces cristaux ?

1° Le cuivre est attaqué par l'acide nitrique. Il se dégage des vapeurs rousses qui remplissent le flacon, tandis que le liquide qu'il contient prend une coloration bleue. On recueille dans l'éprouvette un gaz incolore.

Explication. — La solution diluée d'acide nitrique contient l'ion nitrate NO_3^- qui, en présence des ions H^+, est réduit à l'état de monoxyde d'azote, ou oxyde nitrique NO. La réaction, équilibrée au point de vue du nombre des atomes, s'écrit

(1) $$NO_3^- + 4\,H^+ \rightarrow NO + 2\,H_2O.$$

Au contact de l'air contenu dans le flacon, l'oxyde nitrique s'oxyde partiellement pour donner des vapeurs rousses de dioxyde d'azote NO_2 :

$$2\,NO + O_2 \rightarrow 2\,NO_2.$$

Le cuivre, attaqué par l'acide, donne l'ion cuivrique Cu^{++}, qui colore le liquide en bleu :

(2) $$Cu \rightarrow Cu^{++}.$$

A l'extrémité du tube à dégagement arrive donc un mélange de trois gaz : le dioxyde d'azote, NO_2, l'excès d'oxyde nitrique, NO, et l'azote provenant de l'air contenu dans le flacon au début de l'expérience.

Le dioxyde d'azote se dissout dans l'eau. Le gaz incolore est donc un mélange d'oxyde nitrique et d'azote.

Si l'on soulève l'éprouvette, celle-ci se remplit de vapeurs rousses : l'oxyde nitrique se transforme en dioxyde d'azote au contact de l'oxygène de l'air.

2° La réaction (1) ne satisfait pas au principe de la conservation des charges :

premier membre : 3 charges positives,
second membre : charge nulle.

Nous devons ajouter 3 électrons au premier membre :

(3) $$NO_3^- + 4\,H^+ + 3\,e^- \rightarrow NO + 2\,H_2O.$$

De même la réaction (2) doit s'écrire

$$(4) \qquad Cu \rightarrow Cu^{++} + 2\,e^{-}.$$

Le mélange $NO_3^- + 4H^+$ a capté des électrons : il joue le rôle d'oxydant.

Le cuivre, au contraire, a cédé des électrons : il joue le rôle de réducteur.

La réaction globale est bien une oxydo-réduction.

Dans cette réaction, tous les électrons cédés par le réducteur doivent être captés par l'oxydant. Nous multiplierons tous les termes de (3) par 2 et tous les termes de (4) par 3 :

$$2\,NO_3^- + 8\,H^+ + 6\,e^- \rightarrow 2\,NO + 4\,H_2O,$$
$$3\,Cu \rightarrow 3\,Cu^{++} + 6\,e^-.$$

En ajoutant ces deux équations membre à membre, nous obtenons l'équation ionique de la réaction :

$$(5) \quad 2\,NO_3^- + 8\,H^+ + 3\,Cu \rightarrow 3\,Cu^{++} + 2\,NO + 4\,H_2O.$$

Si nous voulons écrire la formule molaire, il faut ajouter $6\,NO_3^-$ aux deux membres, ce qui nous donne

$$8(H^+, NO_3^-) + 3\,Cu \rightarrow 3(Cu^{++}, 2\,NO_3^-) + 2\,NO + 4\,H_2O,$$

ou encore

$$(6) \quad 8\,HNO_3 + 3\,Cu \rightarrow 3\,Cu(NO_3)_2 + 2\,NO + 4\,H_2O.$$

3° La réaction (5) s'arrête lorsque le liquide ne contient plus d'ions H^+, ou lorsque le cuivre a complètement disparu. Puisqu'il reste un dépôt sur le filtre, c'est qu'il y avait un excès de cuivre.

Calculons la masse m_1 de cuivre attaquée par la solution acide.

L'équation (5) montre que 8 ions-grammes H^+ attaquent 3 atomes-grammes de cuivre, ou encore que le nombre d'atomes-grammes de cuivre contenus dans la masse m_1 g, soit $\frac{m_1}{63{,}5}$, est égal aux $\frac{3}{8}$ du nombre d'ions-grammes H^+ contenus dans le volume v de solution acide. La solution étant normale, ce nombre est $\frac{1 \times v}{1\,000}$.

Nous avons donc l'égalité

$$\frac{m_1}{63{,}5} = \frac{3}{8} \times \frac{1 \times v}{1\,000} = \frac{3v}{8\,000},$$

d'où nous tirons

$$m_1 = 63{,}5 \times \frac{3v}{8\,000}.$$

La masse de cuivre qui reste sur le filtre est

$$m_2 = m - m_1.$$

Application numérique :

$$v = 60 \text{ cm}^3, \qquad \frac{3v}{8\,000} = \frac{3 \times 60}{8\,000} = \frac{9}{400}. \qquad m = 4 \text{ g}.$$

$$m_1 = 63{,}5 \times \frac{9}{400} = 1{,}429 \text{ g},$$

$$m_2 = 4 - 1{,}429 = 2{,}571 \text{ g},$$

$$\boldsymbol{m_2 = 2{,}57 \text{ g}}.$$

3° L'équation (6) nous permet de calculer la masse m' de nitrate de cuivre qui s'est formée. D'après cette équation, le nombre de moles $Cu(NO_3)_2$ est égal au nombre d'atomes-grammes de cuivre contenus dans la masse m_1, soit $\frac{m_1}{63{,}5} = \frac{9}{400}$.

La masse molaire du nitrate de cuivre étant

$$63{,}5 + 14 \times 2 + 16 \times 3 \times 2 = 187{,}5 \text{ g},$$

la masse de $Cu(NO_3)_2$ est

$$m' = 187{,}5 \times \frac{9}{400} = 4{,}219 \text{ g},$$

$$m' = 4{,}22 \text{ g}.$$

Cette masse est inférieure à la masse $m'' = 6{,}65$ g des cristaux recueillis : ceux-ci contiennent donc de l'eau de cristallisation. Ils ont pour formule

$$Cu(NO_3)_2,\ n\,H_2O$$

(n étant un nombre entier), et pour masse molaire

$$187{,}5 + 18\,n.$$

Pour déterminer n, nous écrirons que le nombre de moles $Cu(NO_3)_2, nH_2O$ contenues dans la masse $m'' = 6{,}65$ g de cristaux hydratés est égal au nombre de moles $Cu(NO_3)_2$ contenues dans la masse m' des cristaux anhydres :

$$\frac{m''}{187{,}5 + 18n} = \frac{m'}{187{,}5} = \frac{m'' - m'}{18n}.$$

Nous en tirons

$$n = \frac{187{,}5}{18} \times \frac{m'' - m'}{m'}.$$

Application numérique :

$$m'' = 6{,}65 \text{ g}, \qquad m' = 4{,}22 \text{ g}.$$

$$n = \frac{187{,}5(6{,}65 - 4{,}22)}{18 \times 4{,}22} \approx 6.$$

La formule des cristaux recueillis est

$$\boldsymbol{Cu(NO_3)_2,\ 6\ H_2O}.$$

Autre solution du 2° : utilisation des nombres d'oxydation.

L'expérience montre que l'ion nitrate NO_3^- est réduit à l'état de monoxyde d'azote NO, qui, au contact de l'air, donne des vapeurs rousses de dioxyde d'azote NO_2 tandis que le cuivre est transformé en ion cuivrique Cu^{++} colorant la solution en bleu.

Nous pouvons écrire provisoirement

$$NO_3^- + Cu \rightarrow NO + Cu^{++}.$$

Dans le premier membre, le nombre d'oxydation de l'azote a la valeur x donnée par l'équation $x + 3(-2) = -1$, d'où nous tirons $x = +5$. Dans le second membre il est égal à $+2$. Il a varié de

$$2 - (+5) = -3 :$$

l'azote a été réduit.

Le nombre d'oxydation du cuivre est passé de 0, dans le premier membre, à $+2$ dans le second membre. Il a varié de $2 - 0 = +2$: le cuivre a été oxydé.

La réaction est donc une oxydo-réduction.

Pour qu'il y ait compensation, la variation du nombre d'oxydation de l'azote doit être égale et de signe contraire à la variation du nombre d'oxydation du cuivre. Nous écrirons donc

$$2\ NO_3^- + 3\ Cu \rightarrow 2\ NO + 3\ Cu^{++}.$$

Cette équation n'est équilibrée

— ni au point de vue des charges,

— ni au point de vue du nombre des atomes.

Commençons par équilibrer les charges :

premier membre : charge -2,
second membre : charge $+6$.

Il faut ajouter 8 charges positives au premier membre.

La réaction a lieu en milieu acide : nous ajouterons donc $8\ H^+$.

La réaction sera équilibrée au point de vue du nombre des atomes si nous ajoutons $4\ H_2O$ au second membre, ce qui nous donne

$$2\ NO_3^- + 8\ H^+ + 3\ Cu \rightarrow 3\ Cu^{++} + 2\ NO + 4\ H_2O.$$

100. — Oxydation du soufre par l'acide nitrique. Détermination de la teneur en soufre pur d'un soufre naturel.

On fait agir à l'ébullition un excès d'acide nitrique ordinaire sur une masse $m = 8$ grammes de soufre naturel contenant des impuretés. On constate que le soufre disparaît peu à peu, tandis qu'il se dégage des vapeurs rousses.

Après refroidissement, on étend la solution obtenue avec de l'eau distillée, et on ajoute un excès de solution de chlorure de baryum. On obtient un précipité de sulfate de baryum qui, filtré et séché, a une masse de 52,2 g.

1° Montrer que la réaction de l'acide nitrique sur le soufre est une oxydo-réduction.

2° Calculer la teneur en soufre pur du soufre naturel.

$$S = 32, \quad O = 16, \quad Ba = 137{,}4.$$

1° L'acide nitrique ordinaire contient l'ion nitrate NO_3^-. L'expérience montre que, dans la réaction de cet acide sur le soufre, il se dégage des vapeurs rousses : l'ion nitrate a été réduit à l'état de dioxyde d'azote NO_2.

D'autre part, l'action du chlorure de baryum sur la solution obtenue montre que celle-ci contenait de l'acide sulfurique : le soufre a été oxydé à l'état d'ion SO_4^{--}.

Nous pouvons écrire provisoirement

$$(1) \qquad S + NO_3^- \rightarrow NO_2 + SO_4^{--}.$$

Le nombre d'oxydation du soufre est passé de la valeur zéro à une valeur x telle que $x + 4(-2) = -2$, d'où $x = +6$. Il a donc varié de $+6 - 0 = +6$: le soufre a été oxydé.

Le nombre d'oxydation de l'azote est passé de la valeur x telle que $x + 3(-2) = -1$, d'où $x = +5$, à la valeur $+4$. Il a varié de $+4 - (+5) = -1$: l'azote a été réduit.

La réaction globale est une oxydo-réduction.

Pour qu'il y ait compensation, la variation du nombre d'oxydation du soufre doit être égale et de signe contraire à la variation du nombre d'oxydation de l'azote. Il faut donc 6 atomes d'azote pour un atome de soufre. La réaction (1) doit s'écrire

$$S + 6\,NO_3^- \rightarrow 6\,NO_2 + SO_4^{--}.$$

Cette réaction n'est équilibrée

— ni au point de vue des charges,
— ni au point de vue du nombre des atomes.

Commençons par équilibrer les charges :

premier membre : charge -6,
second membre : charge -2.

Il faut ajouter 4 charges positives au premier membre.

La réaction a lieu en milieu acide : nous ajouterons donc $4\,H^+$.

La réaction sera équilibrée au point de vue du nombre des atomes si nous ajoutons $2\,H_2O$ au second membre, ce qui donne

$$(2) \qquad S + 6\,NO_3^- + 4\,H^+ \rightarrow 6\,NO_2 + SO_4^{--} + 2\,H_2O.$$

Si nous voulons passer aux équations molaires, nous ajouterons $2\,H^+$ à chaque membre :

$$S + 6\,(H^+, NO_3^-) \rightarrow 6\,NO_2 + 2\,H^+, SO_4^{--} + 2\,H_2O,$$

ou encore

$$S + 6\,HNO_3 \rightarrow 6\,NO_2 + H_2SO_4 + 2\,H_2O.$$

2° La solution de chlorure de baryum contient l'ion Ba^{++}, qui, en présence de l'ion SO_4^{--}, donne un précipité de sulfate de baryum :

$$(3) \qquad Ba^{++} + SO_4^{--} \rightarrow \underset{\downarrow}{BaSO_4}.$$

Soit m' la masse du soufre pur qui a été oxydé par l'acide nitrique.

Les équations (2) et (3) montrent que le nombre d'atomes-grammes de soufre pur contenus dans cette masse m', soit $\frac{m'}{32}$, est égal au nombre de moles $BaSO_4$ contenues dans la masse donnée $m_1 = 52{,}2$ g de précipité.

La masse molaire de $BaSO_4$ étant

$$137{,}4 + 32 + 16 \times 4 = 233{,}4 \text{ g},$$

nous pouvons écrire l'égalité

$$\frac{m'}{32} = \frac{m_1}{233{,}4},$$

d'où nous tirons

$$m' = \frac{32 \times m_1}{233{,}4}.$$

La teneur en soufre pur du soufre naturel est donc

$$t = \frac{m'}{m} = \frac{32 \times m_1}{233{,}4 \times m}.$$

Application numérique :

$$m_1 = 52{,}2 \text{ g}, \qquad m = 8 \text{ g}.$$

$$t = \frac{32 \times 52{,}2}{233{,}4 \times 8} = \frac{4 \times 52{,}2}{233{,}4} = \frac{208{,}8}{233{,}4} = 0{,}894,$$

$$t = 89\ \%.$$

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE PREMIER. — **Composition des forces concourantes.**

1. Détermination de la résultante de cinq forces concourantes. 7
2. Calcul des forces exercées par une charge sur les poutres d'une grue. 8
3. Calcul des forces exercées par une glace sur ses appuis . . 9
4. Action de deux forces concourantes sur une poulie fixe. . 10

CHAPITRE II. — **Composition des forces parallèles.**

5. Calcul des forces exercées sur ses appuis par un pont métallique. 13
6. Équilibre d'une tige suspendue à deux ressorts étalonnés parallèles. 16
7. Étude du couple exercé sur le manche d'un tournevis . . 18
8. Équilibre d'une barre soumise à l'action de deux couples. 19

CHAPITRE III. — **Centre de gravité.**

9. Détermination du centre de gravité d'une équerre. . . . 21
10. Détermination du centre de gravité d'une éprouvette à demi remplie d'eau 22
11. Détermination du centre de gravité d'une plaque circulaire évidée.. 24
12. Détermination du centre de gravité et du poids d'un mât . 26

CHAPITRE IV. — **Théorème des moments.**

13. Équilibre d'un levier coudé. 28
14. Équilibre d'une plaque mobile autour d'un axe 30
15. Équilibre d'un treuil différentiel. 31
16. Équilibre d'une plaque triangulaire mobile autour d'un axe horizontal. 33

CHAPITRE V. — **Balance.**

17. Étude de la sensibilité d'une balance. 36
18. Étude de la justesse d'une balance. 38
19. Étude d'une balance romaine. 40
20. Étude d'un pèse-lettre 42

CHAPITRE VI. — **Masse volumique et densité.**

21. Détermination de la densité et de la masse volumique d'un solide 45
22. Détermination de la variation relative de volume accompagnant le mélange d'eau et d'alcool 48
23. Détermination de la composition d'un alliage de cuivre et d'argent 50

CHAPITRE VII. — **Travail et puissance. Machines simples.**

24. Puissance mise en jeu pour extraire l'eau d'un puits à l'aide d'un treuil 51
25. Puissance développée par un cycliste 53
26. Puissance développée par le moteur d'un train à crémaillère. 56
27. Puissance développée pour soulever une charge à l'aide d'une grue 60

CHAPITRE VIII. — **Notion de pression. Principe général de l'hydrostatique.**

28. Pression exercée sur le sol par un camion 63
29. Pression exercée sur un bloc de papier par la lame d'un massicot 64
30. Poids d'un cylindre de plomb obturant l'orifice d'un jet d'eau 65
31. Vases communicants renfermant des liquides différents . . 67
32. Étude d'une presse hydraulique 69
33. Étude d'un vérin hydraulique 71

CHAPITRE IX. — **Théorème d'Archimède.**

34. Poussée d'Archimède sur un solide immergé dans l'eau . . 74
35. Application du théorème d'Archimède à la mesure de la masse volumique de l'eau 76
36. Équilibre d'un solide totalement immergé dans deux liquides superposés 78
37. Distance du centre de gravité au centre de poussée d'un corps flottant 79
38. Corps flottant dans deux liquides superposés 81
39. Étude d'un alcoomètre de Gay-Lussac 83

CHAPITRE X. — **Statique des gaz.**

40. Différence de pression entre la base et le haut d'une éprouvette remplie de chlore 86
41. Étude d'un baroscope 87
42. Correction de poussée de l'air dans une pesée 90
43. Calcul de la force ascensionnelle d'un ballon 92

CHAPITRE XI. — **Loi de Mariotte.**

44. Étude de la compressibilité de l'air 95
45. Étude d'une pipette 99

46. Influence de la pression sur la position d'équilibre d'un corps flottant 102
47. Conditions d'équilibre d'un piston mobile dans un cylindre rempli d'air. 104

CHAPITRE XII. — **Pression atmosphérique. Baromètre.**

48. Calcul de la force exercée sur le piston d'une pompe à eau. 108
49. Étude d'un baromètre renfermant un peu d'air 109
50. Étude d'un baromètre à siphon. 111
51. Équilibre d'un tube barométrique plongeant dans le mercure 114

CHAPITRE XIII. — **Manomètres.**

52. Manomètre à mercure de Cailletet. 117
53. Manomètre à deux liquides. 118
54. Manomètre à grande sensibilité. 121

CHAPITRE XIV. — **Thermomètre.**

55. Correction du point 100 d'un thermomètre à mercure . . 124
56. Comparaison des échelles centésimale et Fahrenheit . . . 126
57. Construction d'un thermomètre à mercure 127

CHAPITRE XV. — **Dilatation des solides.**

58. Dilatation d'un pont métallique. 130
59. Cerclage d'une roue de bois 131
60. Coefficient de dilatation superficielle d'un solide. 132
61. Mesure du coefficient de dilatation de l'aluminium. Étude de la dilatation d'un fil de ce métal 133
62. Dilatation d'un ensemble de deux tiges soudées bout à bout. 135
63. Erreur commise dans la détermination du volume d'un liquide à l'aide d'un ballon jaugé. 137

CHAPITRE XIV. — **Dilatation des liquides.**

64. Mesure du coefficient de dilatation absolue d'un liquide. 140
65. Variation de volume d'une masse donnée de mercure . . 142
66. Correction d'une mesure barométrique. 144
67. Mesure du coefficient de dilatation apparente du mercure. 146
68. Détermination du coefficient de dilatation d'un liquide à l'aide du dilatomètre à tige. 148
69. Dilatomètre à tige renfermant deux liquides. 150

CHAPITRE XVII. — **Dilatation des gaz.**

70. Mesure du coefficient d'augmentation de pression d'un gaz à volume constant. 153
71. Déplacement d'un piston dans un cylindre contenant de l'air à température variable 157
72. Dilatation d'une masse d'air contenu dans un récipient formé de deux vases communicants. 160

CHAPITRE XVIII. — **Masse volumique et densité des gaz.**

73. Masse d'un gaz contenu dans un récipient de volume donné. 164
74. Volume occupé par une masse donnée de gaz. 166
75. Masse d'un gaz contenu dans un tube barométrique. . . 169
76. Masse volumique d'un gaz à différentes températures . . 173
77. Baroscope plongé dans un gaz dont la masse volumique varie. 175

CHAPITRE XIX. — **Calorimétrie.**

78. Mesure du pouvoir calorifique d'un combustible. 180
79. Mesure de la chaleur massique d'un solide 181
80. Mesure de la chaleur massique d'un liquide. 183
81. Influence de la capacité calorifique du vase dans une mesure calorimétrique 185

CHAPITRE XX. — **Changements d'états.**

82. Mesure de la chaleur de fusion de la glace. 189
83. Congélation partielle de l'eau d'un calorimètre par immersion d'un corps à basse température. 192
84. Mesure de la chaleur de fusion de la glace et de la capacité calorifique moléculaire d'un gaz. 194
85. Mesure de la chaleur de vaporisation de l'eau. 198
86. Calcul de la masse d'un volume d'hydrogène recueilli sur la cuve à eau 199
87. Étude de la vaporisation de l'éther. 201

CHAPITRE XXI. — **Chimie. Problèmes généraux. Dosages.**

88. Préparation de l'oxygène. 205
89. Dosage d'une solution d'acide chlorhydrique 207
90. Action d'une solution d'acide chlorhydrique sur de la limaille d'aluminium. 208
91. Étude de la fabrication industrielle de l'acide sulfurique . . 210
92. Dosage volumétrique d'une ammoniaque. 214
93. Préparation des deux carbonates de sodium. 216
94. Analyse d'un mélange de carbonates de calcium et de manganèse 218
95. Oxydation de l'oxyde de carbone par l'oxyde de cuivre . . 219

CHAPITRE XXII. — **Chimie. Réactions d'oxydo-réduction.**

96. Action de l'acide chlorhydrique sur le fer. Oxydation du chlorure ferreux par le chlore 223
97. Oxydation de l'acide chlorhydrique par le dioxyde de manganèse 226
98. Réduction d'une solution de sulfate ferrique par le dioxyde de soufre. 228
99. Action de l'acide nitrique sur le cuivre. Détermination de la formule des cristaux obtenus 230
100. Oxydation du soufre par l'acide nitrique. Détermination de la teneur en soufre pur d'un soufre naturel 234

IMPRIMÉ PAR L'IMPRIMERIE DURAND, 28-LUISANT, FRANCE
Dépôt légal : 1968. — 3e trimestre 1968.